<36608303760011

<36608303760011
F 10
Bayer. Staatsbibliothek

~~Ph. 2720. a~~

Oec. 450.

Oeconomia. Silvarum cultura.
Opp. varia pp 382.

~~Oec. agr. N. 675.~~

R

2720. a

Ueber

die zweckmäßigste und zuverläßigste

Methode grosse Waldungen

zu

messen, zu zeichnen und zu berechnen.

Von

G. A. Däzel,

öffentlichen Lehrer der Mathematik und Forstwissenschaft zu München.

Mit zwey Kupfern und Tabellen.

München,

bey Joseph Lindauer, 1799.

Nro 1701.

Ueber die zweckmäßigste und zuverläßigste Methode grosse Waldungen zu messen, zu zeichnen und zu berechnen.

Imprimatur.

München im kurfürstl. Censur-Collegio den 10. Okt. 1798.

Reichsfreyherr von Schneider auf Negelsfürst, Direktor.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Regist. Fol. 197.

Von Schmöger.

Vorrede.

Man ist nun über den Satz, daß Wälder vermessen werden sollen, fast allgemein einig. Kaum sah man die Nothwendigkeit ein, die Verbesserung der Forstwirthschaft mit Vermessung der Waldungen anzufangen, so ward in größern und kleinern Provinzen Deutschlandes schon zur selben geschritten; so mächtig wirkte diese Wahrheit auf die Gemüther einiger Grossen.

Kein Fürst that diesen Schritt, ohne sich wegen des Wie? bey Sachverständigen Raths zu erhohlen; allein nicht jeder war so glücklich, mit seiner Wahl auf den Mann zu fallen, der zugleich gründliche und vollständige Kenntniß von der Sache besaß, um gut rathen zu können, und es redlich mit der Staatskasse meynte, um auch zu wollen. Daher kam es in der Folge, daß man hier das Ziel nicht traf, und dort die Scheibe ganz verfehlte.

Die Forstplane tragen überall das Gepräge des rathenden Mannes an sich. Ueberhaupt sind sie fast in allen Orten mehr oder weniger unvollständig ausgefallen, in den meisten unrichtig und unvollständig zugleich; nur in wenigen wußte man in selbe Richtigkeit zu bringen, und in den wenigsten auch Richtigkeit mit Vollständigkeit zu paaren.

Der Mann, welcher in diesem Geschäfte seinem Fürsten gut rathen soll, muß nicht Forstmann allein, auch nicht allein Ingenieur, sondern Forstmann und Ingenieur zugleich,

gleich, und überdieß noch in hohem Grade rechtschaffen seyn. Der Ingenieur sorget nur für die Richtigkeit der Kontour und des Flächeninhaltes im Ganzeu, nicht auch für das, zur Bewirthschaftung der Waldungen nöthige Detail. Dagegen sucht der Forstmann, von der Nützlichkelt und Nothwendigkeit überzeugt, das vollständigste Detail in die Plane zu bringen; ob auch richtig? ist er, aus Mangel des mathematischen Sinnes, unbesorgt. Offenbar haben also die Plane des Ingenieurs die Eigenschaften, welche denen des Forstmannes mangeln. Und daher ist es außer Zweifel, daß der, welcher die Vermessung leiten soll, die Kenntnisse des Ingenieurs und Forstmannes in sich vereinigen müsse, und nur als solcher den Planen Richtigkeit und Vollständigkeit zu geben im Stande sey. Allein wie selten sind Männer, welche Wissenschaften, die bisher in gar keiner Verwandtschaft zu stehen schienen, zusammen besitzen?? — So selten nun diese sind, so selten sind auch ganz vollkommene, richtige und vollständige Forstplane.

Hat aber der Mann, welcher das Geschäft leiten soll, nicht nur die hiezu erforderlichen Kenntnisse nicht, sondern noch über dieß auch kein wahres Ehrgefühl, keine Liebe für das allgemeine Beste, um wenigst so viel zu leisten, als in seinen Kräften stünde; so ist es um das Geschäft vollends geschehen, und alles darauf verwandte Geld so viel als verlohren. Er sieht nämlich diese Verfügung des Regenten, wie so manche andere, nur von der Seite, von welcher sie für ihn, seine Freunde und Klienten eine Quelle von reichlicherm Einkommen werden dürfte, und in so fern bey Anstellung der Arbeiter und Gehilfen mehr auf persönliche Verhältnisse, als auf Geschicklichkeit, unterwirft sie eben darum auch keiner, oder doch keiner hinlänglichen scharfen Prüfung. — Die Folge von alle dem ist, daß der Staat für gutes Geld die schlechtesten Plane erhält, und in die Nothwendigkeit versetzt wird, frühe oder spät, wenn der Fehler wird entdeckt worden seyn, die Arbeit wieder von vorn anzufangen. Noch nicht genug! Wohin dann immer der Ruf von Vereitelung dieser wohlthätigen Anstalt kömmt, wird zugleich Miß-

trauen

trauen eingepfropft, und fast allgemein die Vermuthung erregt, daß Forstplane mehr kosten, als sie nützen; daß auch die besten nicht zuverläßig seyen, und man nie sichern Gebrauch davon machen dürfe. Nun glaubt man durch fremden Schaden klug werden zu müssen, und will daher den Schritt nicht wagen, der seinem Nachbarn so sehr mißglückte. — Und so wird dieser sonst gemeinnüzigen Anstalt der Eingang in manches Land um ein ganzes Menschenalter länger versagt.

Aber von dem liegt der Grund nicht in der Leitung des Geschäftes allein, oder in dem, der selbe über sich hatte; auch die, welchen die Ausführung oblag, tragen grossen Theils die Schuld der öfters mißlungenen Vermessung. Leute von den verschiedensten Metiers drängen sich in dieses Geschäft ein. Wer immer nur eine gerade Linie auf dem Papier rein ausziehen, etwa auch noch leserlich schreiben kann, der glaubt schon zum Feldmesser berufen zu seyn. Zeichnung und Handschrift sind alles, was sie empfiehlt, und dennoch nehmen sie zuweilen mächtige Nicht-

kenner

kenner so sehr für sich ein, daß sie ohne weitere Prüfung von denselben zu Feldmessern angestellt werden. Ich selbst kenne einen und den andern, der die Zeichnungskunst bey dem Feldmesser für so wesentlich hält, daß er glaubt, der Zeichner möchte eher ohne Geometrie, als der Geometer ohne Zeichnung ein Feld aufzunehmen im Stande seyn. Wie viele von denen, welche Feldmesser brauchen, wissen, daß diese nebst der Zeichnung auch der Geometrie und Trigonometrie, und selbst noch einiger andern Hilfswissenschaften kündig seyn sollen? Man sollte es nicht glauben, daß auch recht sehr vernünftige Männer, solche nämlich, welche in ihrer Jugend gar keinen Unterricht in der Mathematik genossen, in dem falschen Wahne stehen, daß man die Güte (Richtigkeit und Vollständigkeit) eines Planes aus der Zeichnung beurtheilen könne. Ein solcher war der, welcher vor etwa zehn Jahren mich fragte, ob eine gewisse Flurkarte, die er mir zu gleicher Zeit zum Sehen darreichte, gut sey, oder nicht? — Plan ist Bild, ist sinnliche Vorstellung eines Stückes Erdfläche: wer kann sagen, daß das Bild wohl getroffen sey, wenn er den Gegenstand

des Bildes nicht kennt? wenn er nicht Zeit und Musse hat, Bild und Gegenstand mit einander zu vergleichen? Ein Plan kann musterhaft gezeichnet, und doch, in Hinsicht auf Richtigkeit und Vollständigkeit, sehr mangelhaft seyn. Die ästethische und geometrische Vollkommenheit eines Planes sind ganz verschiedene Dinge; diese ist ihm ganz wesentlich, jene nur zufällig eigen; jene verschaffet ihm nur das äußere Ansehen, diese aber bestimmt seinen innern Werth; beyde verhalten sich ganz so, wie typographische Schönheit und Inhalt eines Buches sich zu einander verhalten. —

Hätten von jeher Männer, welche in öffentlichen Aemtern standen, richtigere Begriffe von der Feldmeßkunst gehabt, es würden nicht so viele Leute von weniger als mittelmäßigen Talenten, und leer an mathematischen Kenntnissen, dummdreist derselben sich angemaßt haben, und in der Folge einige Tausend der auffallendsten Ungerechtigkeiten weniger begangen worden seyn. — Warum duldet man die juridischen und medizinischen Stümper nicht, und duldet doch die geometrischen?

Dieses

Dieses ist die skizzirte Geschichte der Waldvermessung in mehrern Gegenden unsers Deutschlandes. — Das Uebel ist aufgedeckt; aber nun das Gegenmittel? — Schon genug! Die Sonne, die uns aufgegangen, wird endlich in ihrem Tagebogen auch die höchste Stelle erreichen. Man muß die Fehler rügen, wenn man will, daß sie verbessert werden sollen. Erkenntniß des Fehlers ist schon ein Schritt zur Verbesserung. Der Weg zur Wahrheit ist nicht schon gebahnet; er muß es erst durch die vielen Fußtritte derer werden, die ihn wandern; und hier sind selbst die Verirrungen einiger lehrreich, und warnende Beyspiele für andere. Alles geht seiner Vervollkommung, aber langsam, entgegen. Lehrer und Schriftsteller rückten uns auf den Punkt hin, wo wir nun stehen; ihre fortgesetzten Bemühungen für das allgemeine Beste werden uns vollends zum Ziele führen. Schon haben ein Pickel, Rudolph und Moser mit eigenen Abhandlungen über die Vermessung grosser Waldungen, deren Verzeichnung und Berechnung das Publikum beschenket. Ich bin entschlossen zu gleichem Endzwecke auch mein Scherfchen beyzutragen, und vornehmlich zu der Schrift des Herrn

Prof.

Prof. Pickel einige nicht unbedeutende Zusätze zu machen.

Es wird in der Pickelschen Schrift der Meßtisch als untauglich zur Vermessung der Waldungen verworfen, und an dessen Stelle der Winkelmesser empfohlen, auch umständlich gezeigt, wie die Winkel am Umfange gemessen und aufgetragen, und die verzeichnete Figur berechnet werden möge; alles mit der, dem Herrn Prof. ganz eigenen mathematischen Pünktlichkeit. Von dieser Methode, wie von der ähnlichen ältern des Franzosen Quiot habe ich schon vor 10 Jahren Gebrauch gemacht, und um die Zeichnung noch mehr zu erleichtern, die vielseitige Figur einer Waldung in eine einfachere, leicht zu verzeichnende Grundfigur aufgelöset, und dann selbe bey Verzeichnung der Hauptfigur als Grundlage gebraucht. Die jedesmalige Anwendung dieser Methode ist leicht für den selbstdenkenden Forstmesser, aber für den, welcher nur mechanisch, und nach Vorschriften zu arbeiten gewohnt ist, dergleichen es mehrere giebt, schwer und irrsam. — Daher versuchte ich es diese verbesserte Quiotsche Methode auf

eine

eine allgemeine Formel zu bringen. Durch ein glückliches Ohngefähr erhielt ich die zwey Grundgleichungen, aus welchen der berühmte Petersburger Astronom, Hr. Prof. Lexell seine Polygonometrie so vortreflich zu entwickeln wußte. Nun diese zwey Grundgleichungen, und eine daraus abgeleitete dritte setzen uns in Stand, jede aus dem Umfange gemessene Waldung mit aller möglichen Richtigkeit, auf eine ganz leichte Art, zu verzeichnen und zu berechnen.

Der Herr Forstmesser Neebauer hat dieses Jahr, nach der verbesserten zweyten Methode, den Anzinger, wie voriges, nach der verbesserten ersten, den Höhenkirchner Forst, mit beyspiellosem Fleiße, und aller nur möglichen Richtigkeit verzeichnet und berechnet; um so weniger läßt sich die Ausführbarkeit im Geringsten mehr bezweifeln.

Nicht so sehr wegen der Neuheit, als der ungemeinen Brauchbarkeit, welche diese Methode bey Verzeichnung und Berechnung grosser Waldungen gewähret, entschloß ich mich selbe den jungen, für das Gute noch empfänglichen Feldmessern mitzutheilen. Es

sollte

sollte aber diese Schrift zunächst auch zu Vorlesungen dienen; deßwegen, und weil ich mich noch über eines und anderes gerne mittheilen wollte, ist sie etwas weitläufig gerathen, und weitläufiger, als zur Erreichung meiner vornehmsten Absicht, die verbesserte Quiotsche Methode in Umlauf zu bringen, eben nöthig gewesen wäre. Diese zweyte Absicht zn erreichen, suchte ich dem Werkchen so viele Vollständigkeit zu geben, als, ohne das von andern Gesagte weitläufig zu wiederhohlen, möglich war.

Die Vermessung der Waldungen aus dem Umfange, in wie fern dieselbe vermittelst des Winkelmessers geschieht, gehört zwar nur allein in meinen Plan, doch konnte ich nicht umhin, wenigst oberflächlich, zu zeigen, wie auch die größern und kleinern Abtheilungen vermessen werden mögen. Dem Leser, bey welchem ich ohne dieß schon mehrere Kenntniß * voraussetze, genügen diese Winke, und die Zuhörer werde ich durch mündliche Erläuterungen für diese Kürze schadlos zu halten suchen.

Ich

* Meine Anfangsgründe der Goniometrie werden die Lesung dieser Schrift, so viel möglich ist, erleichtern.

Ich wünsche, daß diese Schrift dem fähigen, lehrbegierigen, jungen Feldmesser zum tiefern Nachdenken Anlaß geben, auch mehr Richtigkeit in seine Arbeiten zu bringen, ein kräftiger Antrieb seyn möge.

München den 24. September 1798.

Der Verfasser.

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

Einleitung.

Gewöhnlich sucht man durch Vermessung der Waldungen eine zweyfache Absicht zu erreichen; die eine ist, sich seines Eigenthumes zu versichern, die andere sich die Bewirthschaftung und derselben Leitung zu erleichtern. Jene fordert, daß die Waldung nach ihren Seiten und Winkeln am Umfange allein, diese, daß sie auch nach ihren innern Abtheilungen, die oft sehr manuigfaltig sind, vermessen werde. Selten genüget schon die Messung des Umfangs, gewöhnlich muß damit noch die Messung des Details, dessen mehrere Richtigkeit gar sehr von selber abhängt, verbunden werden. Und dieß mag zugleich die Ursache seyn, warum man hie und da der Messung des Umfangs mehr Aufmerksamkeit schenket, als bisher Brauch war.

Jede dieser beyden Messungen muß nach eigenen Methoden, und mit besondern Werkzeugen geschehen. Die Größe der Waldung, und der geforderte Grad der Richtigkeit bestimmen sowohl die Methode, als das zu deren Ausübung benöthigte Werkzeug. Ist die Waldung groß, und es wird gefordert, daß der Flächeninhalt des Ganzen mit sehr viel Genauigkeit bestimmt werde, so ist der Gebrauch des Meßtisches sicher nicht anzurathen. Die vielen Seiten und Winkel, und besonders die vielen kleinen Wendungen der Gränzlinie geben zu unvermeidlichen Fehlern Anlaß, zu Fehlern, die zwar nicht schon einzeln, aber doch, der stäten Anhäufung wegen, in ihrer Summe öfters gar groß und merkbar ausfallen. Und dieser Anhäufung der Fehler sind in Wäldern nicht so leicht, als auf Wiesen Schranken zu setzen; die dichte stehenden, und auch dichte belaubten Bäume rauben dem Feldmesser die Gelegenheit, zur Prüfung seiner Arbeiten, von Zeit zu Zeit Diagonale zu visiren; und die zu eben der Absicht dienlichen Richtpunkte lassen sich nicht überall um die ganze Waldung herum festlegen. Allein bey kleinen Waldungen ist der Gebrauch des Meßtisches schon weniger irrsam, in eben dem Maaße, in welchem die Zahl der Seiten und Winkel nun kleiner ist. Sind noch überdieß die Wendungen größer, befördern Geräumte das Visiren der Diagonale, und lassen sich innerhalb, oder außerhalb des Waldes Richtpunkte festlegen, so fällt wegen der nun möglichen Prüfung, die Gefahr merklich zu fehlen fast gänzlich weg.

Wenn gleich aber unter den eben erwähnten Bedingungen der Meßtisch, der Richtigkeit der Zeichnung unbeschadet, sich gut brauchen läßt, lernen wir doch durch ihn die Größe der Winkel in Graden immer nur sehr unvollkommen, und oft gar nicht kennen, wenn nämlich die kurzen Seiten die Anlegung des Transporteurs zu sehr erschweren. Es ist also da nur der Winkelmesser zu brauchen, wo man die Winkel, bis auf 3 oder 4 Minuten richtig, zu bestimmen nöthig hat. Und so genau muß man schon, um sich des Eigenthums zu versichern, die Größe der Winkel kennen, weil es nicht genüget blos die Länge der Seiten zu wissen, wenn mehr als drey aufeinander folgende Eckpunkte, welche die verlornen Marksteine bezeichnet hatten, wieder aufgefunden werden sollen; und zwar ohne alle Rücksicht auf die mehrere oder mindere Größe einer Waldung. Aber nicht weniger nöthig ist diese genaue Kenntniß der Winkel zur Berechnung des Inhalts selbst. Wo dieser nur aus gezeichneten, nicht unmittelbar gemessenen oder berechneten Linien abgeleitet wird, muß allemal der gefundene Inhalt von dem zu findenden wahren sehr verschieden ausfallen. Und in dieser Hinsicht steht der Meßtisch dem Winkelmesser, die geometrische Messung der trigonometrischen, auch unter den günstigsten Umständen für jenen immer nach. — Daraus mag man es sich auch erklären, warum Feldmesser, welche eine und dieselbe Waldung zu verschiedenen Malen vermittelst des Meßtisches in Grund legten, in der Bestimmung des Inhaltes so sehr von einander abweichen. — Der Inhalt der Gränzen soll auch schon darum, so viel möglich, richtig berechnet

seyn, weil nach demselben der besonders berechnete Inhalt jeder einzelnen Abtheilnng, damit die Summe der Theile dem Ganzen gleich werde, verhältnißmäßig vermehrt oder vermindert werden muß. Was immer also bey Vermessung des Umfangs unsere Absicht seyn mag, sollte es doch allemal nur den Winkelmesser hiezu zu brauchen erlaubt seyn. Und deßwegen ward auch vor etwa zwey Jahren von der baierischen Forstkammer in München die Verfügung getroffen, daß künftig die landesherrlichen Waldungen, aus dem Umfange, nur mit dem Winkelmesser gemessen werden sollen.

Weniger Richtigkeit fordert die Messung des Details, und mag eben darum auch mit weniger scharfen Werkzeugen, als der Winkelmesser ist, vorgenommen werden. Die nun weniger richtigen Messungen werden durch die vorausgegangene möglich richtige Messung des Ganzen zusammen gehalten, und, indem die Theile einige Punkte und Linien mit dem Ganzen gemein haben, die Anhäufung und Fortpflanzung der wissentlich begangenen kleinen Fehler zu Genüge verhindert.

Das Detail begreift oft gar mancherley in sich. Jede größere Waldung, wenn der Plan auch zum wirthschaftlichen Gebrauche dienen soll, muß in Distrikte, jeder Distrikt in Klassen, getheilt werden. Die **Distrikte** sind größere Theile der Waldung von natürlichen oder künstlichen Gränzen eingeschlossen; sie sollen zwar nur reines Holz von gleicher Gattung und Art, können aber auch gemischtes enthalten. Theile

eines

eines Distrikts mit Holz von gleichem Alter, oder vielmehr von einer und derselben Periode des Alters, bestanden, heissen **Klassen**. Liegt alles zu einer Klasse gehöriges Holz nicht zusammen, sondern auf abgesonderten Plätzen zerstreut, so werden diese **Parthien** genannt. Aber auch die Parthien zerfallen noch ferner in kleinere Theile (**Divisionen**), welche Holz von gleichem Wachsthume, und diese wieder in andere (**Subdivisionen**), welche Holz von gleichem Bestande enthalten. Zählt man zu diesen verschiedenen Abtheilungen noch die **Blößen** und **leeren Schläge**, so kann man alle zusammen das **veränderliche** Detail nennen, im Gegensatz des **unveränderlichen**, das, nebst den **ganzen** Distrikten, die zum Holzboden nicht gehörigen Theile des Waldes in sich begreift.

Jedes Detail läßt sich wieder zweyfach denken, und in das **größere** und **kleinere** abtheilen. Ueberhaupt soll das größere Detail mit schärfern, das kleinere mag, und soll zum Theil, auch mit minder scharfen Werkzeugen gemessen werden. Das größere Detail überhaupt, wohin ich die Distrikte, Klassen, Parthien, leeren Schläge und Blößen rechne, und auch das unveränderliche kleine soll man mit dem Meßtische, das veränderliche kleine aber, die Divisionen und Subdivisionen mit der Boussole, und allenfalls auch nur mit der Kette allein aufnehmen. Wie nämlich nicht alles ohne Unterschied mit dem Winkelmesser aufgenommen werden darf, so muß auch nicht alles mit dem Meßtische gemessen werden, und zuweilen genügen auch

noch

noch minder genaue Werkzeuge. Ueberhaupt muß der Zweck der Messung, und die Beschaffenheit dessen, was gemessen werden soll, die Wahl der Werkzeuge bestimmen.

Ordnung und Deutlichkeit fordern, daß diese verschiedenen Messungsarten von einander getrennt, und abgesondert vorgetragen werden: und daher soll hier zuerst von der Messung des Umfangs, dann erst von der des Details, wieder in bestimmter Ordnung, und so kurz, als möglich, gehandelt werden.

Ich habe Grund zu vermuthen, daß nicht alle, welche dieß lesen, mit den trigonometrischen, und noch die allerwenigsten mit den polygonometrischen Formeln, von welchen in der Folge wird Gebrauch gemacht werden, hinlänglich bekannt seyen. Nun den eigentlichen Fremdlingen in diesem Theile der Mathematik glaube ich einen ganz wesentlichen Dienst zu erweisen, wenn ich diese Formeln, doch ohne Beweis, hier voranschicke.

Trigonometrische Formeln.

I. Wenn α einen spitzigen Winkel bezeichnet, so ist

$\sin. (2\,R - \alpha) = + \sin. \alpha$;

$\cos. (2\,R - \alpha) = - \cos. \alpha$;

$\text{tang.} (2\,R - \alpha) = - \text{tang.} \alpha$.

$\cot. (2\,R - a) = - \cot. \alpha$;

$\sin. (2 R + \alpha) = - \sin. \alpha;$

$\cos. (2 R + \alpha) = - \cos. \alpha;$

$\text{tang.} (2 R + \alpha) = + \text{tang.} \alpha;$

$\cot. (2 R + \alpha) = + \cot. \alpha;$

$\sin. (4 R - a) = - \sin. \alpha;$

$\cos. (4 R - \alpha) = + \cos. \alpha;$

$\text{tang.} (4 R - \alpha) = - \text{tang.} \alpha;$

$\cot. (4 R - \alpha) = - \cot. \alpha.$

II. Es bezeichnen (Fig. 1.) A, B, C die Winkel eines Dreyeckes, und a, b, c die denselben gegenüber stehenden Seiten, so ist

1) $a \sin. B = b \sin. A.$

* Man kann in dieser Formel auch für A und a, oder B und b, den Winkel C und die Seite c setzen.

2) $\cot. B = \frac{c}{b \sin. A} - \cot. A.$

* Ist der negative Theil größer, als der positive, so zeigt dieses an, daß der Winkel B stumpf ist.

** Wenn A stumpf ist, wird cot. A negativ, und muß daher addirt werden.

3)

3) $a = \sqrt{b^2 - 2\,b\,c\,\text{cos. }A + c^2}$; oder

$= \sqrt{b\,c\,(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2\,\text{cos. }A)}$.

* Die letztere Formel hat vor der erstern, der bequemen Rechnung wegen, den Vorzug.

** Ist A stumpf, so muß der negative Theil addirt werden.

4) $\text{cos. }A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$; oder

$\text{cos. }\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(b + c + a)\,(b + c - a)}{4\,b\,c}}$; oder

$\text{sin. }\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(a + b - c)\,(a - b + c)}{4\,b\,c}}$.

III. Wenn P das aus der Spitze C auf A B gefällte Perpendikel, und S das dem Winkel B anliegende Segment der Grundlinie anzeigt, so ist

$P = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2\,c}$; oder

(wenn man $a + b + c = s$ setzt)

$= \frac{\sqrt{s\,(s - 2\,a)\,(s - 2\,b)\,(s - 2c)}}{2\,c}$, und

$S = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,c} = \frac{(a + b)\,(a - b)}{2\,c} + \frac{c}{2}$.

Poly=

Polygonometrische Formeln.

I. Wenn 𝔄 jeden ausgehenden, und 𝔈 jeden eingehenden Winkel eines Vieleckes bedeutet, so ist der äußere Winkel des erstern $= 2\,R - \mathfrak{A}$, und der des letztern $= 2\,R + \mathfrak{E}$.

II. Wenn n die Zahl der eingehenden Winkel eines Vieleckes, und S die Summe der äußern Winkel überhaupt bedeutet; so ist

$$S = (n + 1)\,4\,R.$$

III. Es bezeichnen (Fig. 2.) A, B, C, D, E, F die äußern Winkel, und a, b, c, d, e, f die mit denselben zusammen gehörigen Seiten eines Sechseckes AB, BC, CD, DE, EF, FA, so ist

1) $a \sin.\, A + b \sin\, (A + B) + c \sin.\, (A + B + C) + d \sin.\, (A + B + C + D) + e \sin.\, (A + B + C + D + E) = 0.$

2) $-F = a \cos.\, A + b \cos.\, (A + B) + c \cos.\, (A + B + C) + d \cos.\, (A + B + C + D) + e \cos.\, (A + B + C + D + E)$

3) $$\text{tang. } A = \left\{\begin{array}{l} + b \sin.\, B \\ + c \sin.(B + C) \\ + d \sin.(B + C + D) \\ + e \sin.(B + C + D + E) \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{l} + a + b \cos.\, B \\ + c \cos.(B + C) \\ + d \cos.(B + C + D) \\ + e \cos.(B + C + D + E) \end{array}\right.$$

* Es ist leicht, das Gesetz, das in diesen Formeln liegt, zu entdecken, und darum die Anwendung

selbst

selbst auf andere Vielecke mit gar keiner Beschwerniß verbunden.

Diese Formeln sind von sehr großem Nutzen, und in der Folge werden wir bey Auflösung verschiedener Aufgaben davon Gebrauch machen.

Mes-

Messung des Umfangs.

§. 1.

Vorausgesetzt, daß die zu vermessende Waldung vorläufig, wenn sie es noch nicht war, vermarket worden, ist ihr Umfang eine geradlinige Figur, und besteht daher aus Linien und Winkeln. Indem also der Umfang gemessen werden soll, müssen Linien und Winkel mit eigenen Werkzeugen, und auf eigene Weise gemessen werden.

Messung der Linien.

§. 2.

Linien werden theils unmittelbar, theils mittelbar gemessen. Die unmittelbare Messung einer Linie geschieht ganz nach den mechanischen Regeln, die mittelbare aber nach solchen, welche ihren Grund in gewissen Eigenschaften der Dreyecke haben, und darum geometrische heissen mögen. Die unmittelbare Messung ist, ganz unabhängig von der mittelbaren, ausführbar, aber diese ist nicht auch unabhängig von jener zu gebrauchen, und zuweilen selbst von der Winkelmessung nicht, wie schon aus dem Begriffe: mittelbar, zu folgen scheint.

§. 3.

Zur unmittelbaren Messung der Linien bedient man sich bald der Meßruthe zu 10, bald der Meßkette zu 50 oder 100 landesüblichen Fußen, bald beyder zugleich. Da hier nicht die äußerste Genauigkeit erfordert wird, so mag man sich mit der Meßkette fast allein begnügen. Der Gebrauch der Meßkette auf dem ebenen Lande ist jedem Anfänger in der Feldmeßkunst bekannt; nur muß ich noch anmerken, daß wenn die Kette bey dem letzten Umschlage über das Ende der zu messenden Linie hinaus reicht, die Zolle des letzten Fußes, auch, wenn die Kette nur bis auf einzelne Fuß oder Ruthen richtig befunden worden, die Fuß der letztern Ruthe, oder die Ruthen des Kettenstückes, durch Anlegung einer Meßruthe gemessen werden. Und in so fern mag mit der Meßkette immer noch die halbe Meßruthe, der gewöhnliche Spatzierstock des Feldmessers, verbunden werden.

§. 4.

Noch mehr Fleiß und Aufmerksamkeit hat der Feldmesser in Gebirggegenden zu brauchen. Hier steigt und fällt die Erdfläche bald mehr oder weniger schnell, bald nur langsam, und beynahe unmerklich. Offenbar darf in Fällen erster Art die gemessene schiefe Linie nicht statt der horizontalen, welche unmittelbar nicht meßbar ist, in den Plan getragen werden; aber auch in Fällen zweyter Art, vornehmlich wenn die Linie sich sehr in die Länge zieht, ist es nicht räthlich eine für die andere zu nehmen; denn obschon der Unter-

schied

schied zwischen beyden, von einem Marksteine zum andern nicht merklich ist, wird er es doch im Ganzen durch die stäte Anhäufung der vernachläßigten kleinen Fehler.

§. 5.

Viele Feldmesser lassen mit verkürzter Kette bergan und bergab messen, und tragen die Summe der so gemessenen horizontalen Linien in den Plan. Allein geschweige, daß dieses ihr Verfahren sehr irrsam ist, was sie aus Mangel der Theorie nicht einsehen, genüget die Messung des horizontalen Abstandes der Marksteine noch keineswegs, sondern, weil vornehmlich die schiefe Entfernung derselben von einander in dem Gränzvermessungsregister angeführt werden muß, hat man eben darum sich auch diese durch die Messung bekannt zu machen.

§. 6.

Man erhält beyde Linien, die schiefe und horizontale, wie mit einem Mal, wenn man jene mißt, und diese daraus, und aus dem gleichfalls gemessenen Neigungswinkel berechnet.

Z. B. Es halte (Fig. 3.) die gemessene schiefe Linie AB, 218′, der gemessene Neigungswinkel BAC, 7° 30′, so ist die horizontale $AC = AB \cos. A = 218'. \cos. 7° 30'$; oder $\log. AC = \log. AB + \log. \cos. A$

$$= 2{,}3384565 + 9{,}9962686$$
$$= 12{,}3347251 - 10 = 2{,}3347251;$$ also

$AC = 216',13.$

§ 7.

§. 7.

Man hat bey der Messung des Neigungswinkels zweyerley zu beobachten:

1) Daß der Stand zunächst am Fuße des Abhanges angenommen, und

2) nach einem senkrecht stehenden Stabe gleicher Höhe mit dem Werkzeuge, bergan visirt werde.

Außerdem hat man nicht nöthig in Bestimmung dieses Winkels, vornehmlich wenn er nicht über 7 bis 8 Grade hält, gar ängstig zu seyn. Auch die Unebenheiten, welche auf der schiefen Fläche selbst, zwischen zweyen nächsten Marksteinen, vorkommen, haben keinen Einfluß auf die Messung der Linie; und die daher rührenden Fehler sind so unbeträchtlich, daß man auf selbe keine Rücksicht zu nehmen braucht.

§. 8.

Aber das, was wir bisher von Reducirung der gemessenen schiefen Linien auf den Horizont sagten, ist nur allein von Linien zu verstehen, welche in dem Umfange liegen. Bey Vermessung des Details mag man schon eher des beliebten stufenweise Messens sich bedienen.

§. 9.

Was man bey noch kleinern Unebenheiten, solchen nämlich, welche nicht breiter, als die Kette

lang,

lang, sind, zu beobachten habe, ist bekannt, und braucht hier nicht wiederholt zu werden.

§. 10.

Die mittelbare Messung der Linien, in wie fern dabey vorausgesetzt wird, daß nicht nur einige Linien, sondern auch Winkel gemessen worden seyen, ist mit der Messung der Winkel zu sehr verwandt, als daß sie von derselben getrennt werden möchte, und muß daher mit selber in Gemeinschaft vorgetragen werden.

Messung der Winkel.

§. 11.

Wie alle Linien auf dem Plane, nach dem Begriffe der Aehnlichkeit, denen auf dem Felde proportional seyn müssen, so müssen auch alle Winkel hier wie dort gleich seyn, und darum gleichfalls unmittelbar oder mittelbar gemessen werden.

§. 12.

Zur unmittelbaren Messung der Winkel wird ein künstliches Werkzeug, das man schlechthin den Winkelmesser nennt, gebraucht. Der Bau dieses Werkzeugs, wenigst dem Wesen nach, wie auch der Gebrauch desselben, wird hier, als jedem Feldmesser bekannt, vorausgesetzt. Es soll aber der Feldmesser, der mit diesem Werkzeuge arbeiten will, dasselbe gründlich, nicht oberflächlich kennen; er soll wissen, wie er es prüfen, und die allenfalls entdeckten Fehler auch verbessern möge, und wenn er sich dem letztern nicht ge-

wachsen

wachsen findet, lieber gar nicht, als mit einem fehlerhaften Werkzeuge zu arbeiten sich entschließen. Ist es aber gut, so soll er es auch in gutem Zustande zu erhalten suchen. — Was kann man sich von einem Feldmesser denken, der in einem einzigen Sommer ein neues, gutes, kostbares Goniometer bis zur Unbrauchbarkeit übel zurichtet, und weniger dafür, als ein Holzhauer für seine Axt, besorgt ist?

§. 13.

Es ist aber kein Werkzeug so ganz unverbesserlich, auch hat kein Feldmesser so vollkommene Sinne, keinen so grossen, anhaltenden und ununterbrochenen Fleiß, als in der Theorie vorausgesetzt wird; und darum ist auch das Resultat ihrer Arbeiten immer mehr oder weniger von dem unterschieden, was man sich zu Folge der Theorie versprach. Es sind einige Fehler, welche theils aus kleinen Unrichtigkeiten des Werkzeuges, theils aus der Unvollkommenheit unserer Sinne entspringen, so unvermeidlich, als hinwieder andere, welche nur in dem Unfleiße ihren Grund haben, vermeidlich sind. Diese letztern kommen bey Untersuchung der Zuverläßigkeit, mit der Winkel gemessen werden können, in gar keinen Anschlag; aber auch unter jenen muß in eben dieser Hinsicht unterschieden, und die Fehler des Werkzeuges von denen des Auges, und der gleichsam natürlichen Ungeschicklichkeit Meßwerkzeuge zu behandeln, abgesondert erwogen werden.

§. 14.

Bey allem angewandten Fleiße begeht der Feldmesser, obschon ganz unwillkührlich, immer einige Fehler; bald versieht er es in der horizontalen Einrichtung der Scheibe, bald in der Stellung des Fernrohrs, bald in der Schätzung der Theile des Vernier, bald auch in mehrern, oder allen zugleich. Allein theils sind diese Fehler einzeln, wenn man es nur nicht an Fleiß ermangeln läßt, nicht von Belang, theils heben sie sich grossen Theils gegen einander auf, und summiren sich zu keiner merklichen Größe. Weicht schon die Scheibe von der horizontalen Ebene 15 bis 20 Minuten ab, beträgt dennoch der daraus sich ergebende Fehler des gemessenen Winkels kaum eine Minute, wenn nicht zugleich die Gegenstände selbst mehrere Grade über oder unter dem Horizonte sich befinden, in welchem Falle er freylich vielmal mehr betragen würde. Der aus der Stellung des Fernrohrs kommende Fehler ist wegen der ungemeinen Feinheit der in Glas geritzten Linien, noch weniger beträchtlich. Und wenn endlich ein Winkel vermittelst des Vernier sich von 2 zu 2 Minuten messen läßt, auch sonst das Werkzeug von guter Hand und fleißig verfertigt worden, wird man in der Schätzung nicht leicht um eine Minute fehlen.

§. 15.

So unwahrscheinlich es nun ist, daß diese Fehler alle entweder positiv oder negativ seyen, so wahrscheinlich ist es im Gegentheile, daß immer einige gegen andere sich aufheben, und daher ihre algebraische

Summe nie viel betragen könne. Am besten überzeugt man sich von der Richtigkeit dieser Behauptung, wenn man die Winkel eines und desselben Vieleckes wiederholt mißt, und sie jedesmal summirt; man wird erfahren, daß die gemessenen Winkel nur um 1 bis 2 Minuten variren, und selbst die jedesmaligen Summen nicht merklich sich unterscheiden.

§. 16.

Aber nicht so leicht heben sich auch die Fehler auf, welche in dem mangelhaften Bau des Werkzeuges gegründet sind, und von welchen vornehmlich der Künstler, der dieses verfertigte, die Schuld trägt. Da sie nothwendige Wirkungen ihrer Ursache, ein wie das andere Mal mehr oder weniger dieselben sind, und lange positiv oder negativ bleiben, so läßt es sich nicht begreifen, wie ihre Summe, vornehmlich wenn sie eine und dieselbe Unrichtigkeit des Werkzeuges zum Grund haben, also gleichartig sind, will nicht sagen, unbedingt klein, sondern auch nur merklich vermindert werden möge.

§. 17.

Es kann ein Werkzeug auf vierfache Weise unrichtig seyn:

1) Wenn das Fernrohr nicht in einer vertikalen Ebene auf und nieder beweglich ist;

2) wenn der Rand nicht richtig getheilt ist;

3) wenn

3) wenn der Vernier nicht den gehörigen Bogen fasset, und

4) wenn die Alhidade excentrisch läuft.

Und damit giebt es auch viererley Fehler. — So möglich es nun ist, daß bey Messung eines Winkels die Fehler verschiedener Art einander sich vermehren, so möglich ist es auch, daß sie einander sich vermindern: allein daß sie sich gegenseitig aufheben, und weder auf die einzelnen Winkel, noch deren Summe merklichen Einfluß haben, ist schlechthin unmöglich. — Oder wer darf behaupten mit einem unrichtigen Werkzeuge, ohne vorläufige Verbesserung der daher entstandenen Fehler, je eine richtige Messung gemacht zu haben? — Die Fehler des Werkzeuges mögen gleicher oder verschiedener Art seyn; nie findet eine Aufhebung Statt.

§. 18.

Geschickte Feldmesser wissen aus der bekannten Eigenschaft ihres Auges, das Werkzeug indessen als vollkommen richtig angenommen, die äußerste Gränze zu bestimmen, innerhalb welche der daher entspringende möglich größte Fehler falle, und eben so auch umgekehrt, wenn das Aug unverbesserlich scharf wäre, aus dem etwas unrichtig befundenen Bau des Werkzeuges das zu berechnen, um was der gemessene Winkel von dem wahren abweichen dürfte. Dieses dient, so fern man es für nöthig hält, die gemessenen Winkel zu verbessern, und dieses und jenes die Zuverläßigkeit einzuse-

zusehen, mit welcher jemand vermittelst eines gewissen Werkzeuges Winkel zu messen im Stande sey.

§. 19.

Aus diesem Kalkul und der Erfahrung selbst hat sich ergeben, daß ein Feldmesser durch ein scharfes Aug, und eine geschickte, sanfte Hand, mit einem nicht mittelmäßigen Fleiße verbunden, sich gegen beträchtliche Fehler hinlänglich verwahren könne. Gewisse Vorsichtsregeln setzen ihn in Stand, auch weniger beträchtliche Fehler theils zu entdecken, theils und vornehmlich, an Maaß und Zahl zu vermindern. Eben diese Vorsichtsregeln mögen nebenher auch dienen einzelne, aus verzeihlicher Unachtsamkeit begangene gröbere Fehler aufzufinden.

§. 20.

Erste Vorsichtsregel.

Dem fleißigsten Feldmesser widerfährt es zuweilen, daß er von einem richtig gemessenen Winkel die Grade irrig zählt. Gegen diesen Fehler, der meistens sehr in das Grobe fällt, verwahrt man sich leicht, und mit gutem Erfolge, wenn man mit dem Winkelmesser eine Boussole verbindet, und auf jedem Stande den Winkel mit beyden Werkzeugen mißt, und die Grade, die er auf beyderley Weise gemessen hat, mit einander vergleicht. Denn ergiebt sich nun eine Differenz, so beweiset dieß hinlänglich, daß entweder der Winkel auf die eine oder andere Weise fehlerhaft gemessen, oder doch die Grade irrig gezählt worden seyen.

§. 21.

§. 21.

Zweyte Vorsichtsregel.

Die Boussole dient noch auf andere Weise gröbere Fehler, die etwa im Aufschreiben oder Lesen der Grade begangen worden, zu entdecken. Bekanntlich ist die Richtung der Magnetnadel für die kurze Zeit, welche die Messung dauert, unveränderlich. Mißt man daher entweder auf jedem, oder auch nur auf jedem zweyten, dritten oder vierten Stande den Winkel, welchen die unveränderliche Richtung der Magnetnadel mit einer Seite des Umfangs macht, so verschaffet dieses bey der ersten Zeichnung, wo zugleich die Magnetlinien ausgezogen worden, die Versicherung, daß, so fern dieselben alle parallel laufen, wenigst kein grober Fehler in den Winkeln Statt habe, im Gegentheile aber, und wenn eine oder die andere Magnetlinie die übrigen Parallelen schneidet, einen zuverläßigen Beweis, daß ein solcher entweder an dem Stande selbst, durch welchen die nicht parallele Magnetlinie geht, oder doch nahe dabey vorgegangen sey. Durch Nachmessen mag dann der Ort und Betrag des Fehlers näher bestimmt werden.

§. 22.

Dritte Vorsichtsregel.

Wüßte man gewiß, daß die aus der individuellen Beschaffenheit des Werkzeuges herrührenden Fehler auf jedem Stande nächstens an Art und Größe gleich wären, so würde die Verbesserung der einzelnen Fehler

ler eben so leicht seyn, als die Entdeckung aller es ist. Man suche sie also, so viel möglich ist, einander gleich zu machen, und messe zu dem Ende alle Winkel mit einem und demselben Bogen des eingetheilten Randes. Aus gleicher Absicht soll man auch bey dem Visiren die Kippregel ohne Noth sehr merklich weder auf- noch abwärts drehen, und selbst Fälle, wo dieß öfters nothwendig seyn dürfte, zu vermeiden suchen.

§. 23.

Vierte Vorsichtsregel.

Bekanntlich erhält man die Summe aller innern Winkel eines Vieleckes, wenn man die, um 2 verminderte Anzahl der Seiten mit 180° multiplicirt. Man messe daher, oder schreibe vielmehr immer nur die innern Winkel auf, so kann man am Ende die Summe der gemessenen innern Winkel mit der Summe der wahren, oder dem Produkte aus 180° in die um 2 verminderte Anzahl der Seiten, vermittelst der Subtraction vergleichen, und daraus ein leichtes Mittel zur Verbesserung der gemessenen einzelnen Winkel herleiten. Es besteht darinn:

1) Daß man die Summe der gemessenen innern Winkel mit der Summe der wahren vergleicht, und die kleinere von der größern abzieht;

2) die erhaltene Differenz durch die Zahl der Seiten dividirt;

3) die

3) die zum Quotient erhaltenen Minuten zu jedem gemessenen Winkel addirt, wenn die Summe der gemessenen Winkel kleiner ist, als die Summe der wahren, oder wenn sie größer ist, davon subtrahirt;

4) daß man endlich, wenn der Quotient auch Secunden enthält, selbe besonders mit der Zahl der Seiten multiplicirt, und das Produkt durch 60 dividirt, und

5) die so gefundene Minutenzahl auf die schon einmal verbesserten Winkel nur willkührlich und in gleichen Entfernungen, oder aber aus Gründen auf diejenigen allein, bey welchen man schon vorläufig gefehlt zu haben glaubte, gleichmäßig vertheilt.

Diese Methode die gemessenen Winkel zu berichtigen setzt voraus, daß alle gemessene Winkel um gleichviel größer oder kleiner als die wahren seyen, das freylich nicht wahr ist, doch in dem Maaße wahrscheinlicher, als die Winkel einander mehr gleich sind, und immer mehr oder weniger der nämliche Theil des Randes zum Messen gebraucht worden; vornehmlich wenn man bey der schon früher angestellten Prüfung keinen einzelnen groben Fehler entdeckt hat, auch keiner Nachläßigkeit bey Messung der Winkel sich bewußt ist.

§. 24.

Fünfte Vorsichtsregel.

Große Waldungen, welche vornehmlich mit dem Winkelmesser aus dem Umfange aufgenommen werden

sollen,

sollen, haben gemeiniglich auch um so viel mehrere Seiten und Winkel, als sie von weiterm Umfange sind. Nun erschweret die Vielheit der Seiten und Winkel gar sehr die Zeichnung, und die, zu deren Behuf vorläufig anzustellenden polygonometrischen Rechnungen; und daher soll man dieselben zu vermindern, schon während der Messung, keine Gelegenheit versäumen. Es kann dieß auf mancherley Weise geschehen:

1) Wenn man die ganze Waldung in zwey, drey oder mehrere Abschnitte theilt, und jeden solchen Abschnitt als ein kleines abgesondertes Ganzes vermißt.

Damit aber durch eben dieß die Arbeit auf dem Felde nicht vermehrt werde, durch was man sich die zu Hause vermindern wollte, soll die Theilungslinie so kurz, und so wenig gebrochen, als möglich ist, seyn. Wird aus den gemessenen Winkeln und Linien, welche die Theilungslinie ausmachen, noch die gerade Linie (Diagonale) von einem Gränzpunkte, zum andern berechnet, so ergiebt sich ein zweyter Vortheil, und die Zahl der Seiten und Winkel wird auch für jeden Abschnitt insbesondere beträchtlich vermindert. Dieser Vortheil ist von solcher Wichtigkeit, daß man auch da, wo sich keine solche gebrochene Theilungslinie darbiethet, selbst aus den, am Umfange gemessenen Winkeln und Linien Diagonale berechnen sollte. Und wenn die hiezu erforderliche Zahl der Winkel und Linien eben nicht groß ist, behauptet diese Methode eine Waldung in Abschnitte zu theilen, noch vor jener erstern den Vorzug.

2) Wenn

2) Wenn man lange und schmale vorspringende Theile des Waldes, oder in den Wald sich ziehende Grundstücke, von dem Ganzen abschneidet.

Im ersten Falle muß die Theilungslinie meistens berechnet, im zweyten kann sie auch gemessen werden.

3) Wenn man der Stände selbst so wenig, als möglich ist, macht.

Dadurch wird nicht nur die Summe der Fehler vermindert, sondern die Arbeit auf dem Felde gar sehr beschleunigt; weil es gewiß ist, daß der öftere Gebrauch des Winkelmessers aufhält, und Fehler häuft. In dem Maaße aber auf dem Felde die Arbeit beschleuniget wird, wird hinwieder die zu Hause etwas verzögert, da die, mit den übersprungenen Marksteinen zusammengehörigen Linien und Winkel am Umfange, nun berechnet werden müssen. Indessen lohnet uns der dadurch bewirkte höhere Grad der Richtigkeit reichlich für diese mehrere Mühe.

Es können aber die übersprungenen Marksteine auf dreyfache Weise an die mit ihnen zusammengehörige Standlinie angemessen werden:

a. Durch gefällte Perpendikel.

Diese Methode ist vornehmlich da anwendbar, wo die zu fällenden Perpendikel nicht über 20 bis 30 Fuß lang seyn dürfen, oder, wenn sie etwas länger seyn müs-

müssen, die Durchschnittspunkte der Perpendikel mit der Standlinie vermittelst des Meßkreutzes gesucht werden.

b. Durch gemessene Dreyecke.

In diesem Falle müssen aus den Seiten der angemessenen Dreyecke die Längen und Breiten der Marksteine, oder ihre senkrechten Entfernungen von dem einen Standpunkte und der Standlinie durch Rechnung bestimmt werden; und in so fern kömmt dieses Hilfsmittel mit dem vorigen überein, und unterscheidet sich nur durch die längern Perpendikel, welche, um davon Gebrauch machen zu können, hier berechnet werden müssen.

c. Durch gemessene Winkel.

Dieses Mittel kömmt mit den beyden vorigen im Wesentlichen überein, da wieder aus den gemessenen Winkeln und der Standlinie die Längen und Breiten der übersprungenen Marksteine berechnet werden müssen.

Sind nun auf die eine oder andere Weise die übersprungenen Marksteine durch ihre gemessenen oder berechneten Längen und Breiten gegen die Standlinie festgelegt worden, so ist man auch die mit selben zusammengehörigen Gränzlinien und Gränzwinkel zu berechnen im Stande.

§. 25.

§. 25.

Bisher ward noch angenommen, daß jedesmal der Winkelmesser so über dem Gränzpunkte gestellt werden könne, daß der Mittelpunkt des eigentlichen Randes in senkrechter Linie darüber zu liegen komme. Allein es ereignet sich öfters, daß man, wenn die Gränzlinien nicht rein gehalten worden, auch nicht gleich gereiniget werden können, sowohl zum nächst vorhergehenden, als nachfolgenden andern nicht hinsehen kann. In diesem Falle, welcher die Arbeit zu Hause und auf dem Felde gar sehr erschwert, wird das Werkzeug neben dem Marksteine aufgestellt, und sowohl der Winkel am Standpunkte, als die ihn bildenden Standlinien gemessen. Aus diesem (excentrischen) Winkel, und diesen Linien wird dann zu Hause der (concentrische) Winkel an dem Gränzpunkte, und die ihn einschliessenden Gränzlinien durch Rechnung (Centrirung) bestimmt. Von der Entfernung des Standpunkts (Excentricität) von dem Gränzpunkte hängt die Methode ab, welche bey dem Centriren der Winkel zum Grunde liegt. Es wird etwas anders verfahren,

1) wenn die Excentricität sehr klein, und anders,

2) wenn sie mehr oder weniger groß ist.

§. 26.

Zuweilen kann man aus einem Gränzpunkte zwar nach dem nächsten einen, aber nicht auch dem nächsten andern hinsehen. Wenn nun auch dieser letztere sich dem Auge in jedem, dem Marksteine gegenüber ange=

angenommenen Punkte entzieht, sind bald ein bald zwey Zwischenstände nöthig. Auch hier müssen zwey Fälle unterschieden werden: Der

1) wo die Zwischenstände der unübersehbaren Gränzlinie sehr nahe, und der

2) wo sie nur mehr oder weniger weit davon angenommen werden können.

Trigonometrische und polygonometrische Aufgaben.

§. 27.

Wir haben nun die verschiedenen Fälle aufgezählt und geordnet, welche bey Messung der Linien und Winkel vorkommen, und besonders diejenigen, wo Linien oder Winkel, oder beyde zugleich mittelbar gemessen werden sollen, von dem, wo die Linien und Winkel am Umfange unmittelbar gemessen werden können, sorgfältig abgesondert. Es übriget nur noch, daß wir auch die Auflösungen von diesen mancherley Aufgaben mittheilen, und durch Beyspiele erläutern. Indem wir aber dieß thun, behalten wir nicht auch die bisherige Ordnung bey, sondern ordnen vielmehr die Aufgaben so, daß immer die leichtern vor den schwerern zu stehen kommen.

§. 28.

1. Aufgabe. Es sey (Fig. 4.) BDC ein Gränzwinkel. Man könne aus D weder nach B noch nach

C

C hinsehen, wohl aber aus einem, dem D sehr nahen Punkte A. Es sollen der Gränzwinkel BDC, und die ihn einschliessenden Gränzlinien BD und DC gefunden werden.

Auflösung. Man wähle den Standpunkt A so, daß die Linie AD, welche die Excentricität bezeichnet, auf der Standlinie AC senkrecht steht, und messe die Linien AB, AC und AD, und den Winkel BAC. Da der concentrische Winkel BDC der Summe aus dem excentrischen BAC und den beyden parallactischen Winkeln ABD ACD gleich ist, so kömmt alles darauf an, daß diese beyden letztern aus den gemessenen Linien und Winkeln gefunden werden. Man fälle zu dem Ende (in der freyen Handzeichnung) aus D auf BA, welche auch, wenn es nöthig ist, verlängert werden mag, das Perpendikel DE, so erhält man das kleine Dreyeck ADE, in welchem der Winkel ADE allemal genau so viele Grade und Minuten hält, als um viele der excentrische Winkel BAC größer oder kleiner als 2 R ist. Es sey dieser Winkel $= \beta$, so ist DE $=$ AD $\cos.\ \beta$, und AE $=$ AD $\sin.\ \beta$; also BE $=$ AB $\pm$ AD $\sin \beta$, und daher

$$\cot.\ ABD = \frac{AB}{AD \cos.\ \beta} \pm \tan g.\ \beta.$$

Auch ist

$$\cot.\ ACD = \frac{AC}{AD}.$$

Wer=

Werden die nun gefundenen parallactischen Winkel zu den excentrischen addirt, so erhält man zur Summe dem concentrischen, welcher gesucht ward.

Ist AD in Vergleichung mit AB und AC sehr klein, so kann man ohne merklichen Fehler DC = AC, und DB = BE = AB ± AD sin. β annehmen. Und damit sind auch die, den schon berechneten Winkel einschliessenden Seiten DC und DB gefunden. Im entgegengesetzten Falle, oder wenn AD in Vergleichung mit den Standlinien größer ist, als daß man diese den Gränzlinien gleich setzen dürfte, müssen die letztern aus den erstern berechnet werden.

Z. B. Es sey AB = 264,7; AC = 235; AD = 1,7; BAC = 192° 16′; also β = 12° 16′, so ist

log. cos. 12° 16′ = 9,9899698
log. 1, 7 = 0,2304489

— 10,2204187
log. 264, 7 = 2,4227539

2,2023352 = log. 159,33
tang. 12° 16′ = 0,217

159,547 = cot. 21′ ½;
ABD = 21′ ½.

$\frac{235}{1,7}$ = 138,23 = cot. 24′ ⅘; ACD = 24′ ⅘.

Und

Und daher ADC $= 192^\circ\ 16' + 2'\frac{1}{2} + 24'\frac{4}{5}$
$= 193^\circ\ 2'$.

log. sin. $12^\circ\ 16' = 9,3272811$
log. 1, 7 $= 0,2304489$
$9,5577300 - 10 =$ log. 0,3611.

Demnach BE $= 264, 7 + 0, 36 = 265, 06$;
BD $= 265, 1$; DC $= 235$.

§. 29.

2. Aufgabe. Man könne, unter eben denselben Voraussetzungen, auch aus keinem, dem D (Fig. 5.) sehr nahen, sondern nur aus einem mehr oder weniger entfernten Punkte A, nach B und C hinsehen: den Gränzwinkel BDC, und die ihn einschliessenden Gränzlinien BD und DC zu finden.

Auflösung. Man messe aus dem nun mehr oder weniger weit entfernten Standpunkte A, die Winkel BAD und DAC, auch die Linien BA, AC und AD, so ist

$$\text{cot. } ABD = \frac{AB}{AD \text{ sin. } BAD} \mp \text{cot. } BAD, \text{ und}$$

$$\text{cot. } ACD = \frac{AC}{AD \text{ sin. } CAD} \mp \text{cot. } CAD; \text{ also}$$

$$BDC = BAD + DAC + ABD + ACD.$$

Aus

Aus den nun berechneten Winkeln, und den schon vorläufig gemessenen Winkeln und Linien lassen sich auch die Gränzlinien BD und CD ohnschwer bestimmen. Denn es ist

$$BD = \frac{AD \text{ sin. } BAD}{\text{sin. } ABD} \text{ und}$$

$$CD = \frac{AD \text{ sin. } CAD}{\text{sin. } ACD}.$$

Z. B. Es sey AB = 476; AC = 392; AD = 254; BAD = 28° 7′; CAD = 35° 45′, so ist

log. 254 = 2,4048337
log. sin. 28° 7′ = 9,6732684

— 12,0781021
log. 476 = 2,6776069 + 10

0,5995048 = log 3,977
cot. 28° 7′ = — 1,87152

2,10548 = cot. 25° 25′;
ABD = 25° 25′.

Durch ähnliches Verfahren findet man ACD = 38° 37′.

log. 254 = 2,4048337
log. sin. 28° 7′ = 9,6732684

12,0781021
log. sin. 25° 25′ = 9,6326576

2,4454445 = log. 278,9
BD = 278,9.

Und eben so CD = 237,7.

§. 30.

§. 30.

3. **Aufgabe.** Es sey (Fig. 6.) ABC ein Gränzwinkel. Man könne aus B nach A, aber nicht zugleich nach C, auch nicht aus einem, dem B gegenüber liegenden, weder sehr nahen, noch mehr oder weniger entfernten Punkte, hinsehen; dagegen sey gegen die Mitte der Linie BC, und sehr nahe bey derselben ein Punkt D, woraus man freye Aussicht nach B und C hin habe: den Gränzwinkel ABC, und die Gränzlinie BC zu finden.

Auflösung. Man mache in D einen Zwischenstand, und messe aus B den Winkel ABD, aus D den Winkel BDC, auch die Linien AB, BD und CD. Da im Dreyecke BDC die Winkel B und C sehr spitzig sind, so ist nächstens

$BD : CD = C : B$; also

$BD + CD : CD = C + B : B$; oder

$BD + CD : CD = 2R - D : B$; folglich

$$B = \frac{(2R - D)\,CD}{BD + CD}, \text{ und}$$

$ABC = ABD - CBD.$

Nun fälle man aus D das Perpendikel DX, so ist

$1 : \cos. B = BD : BX$, und

$1 : \cos. C = CD : CX$; also

$BC = BD \cos. B + CD \cos. C.$

Z. B. Es sey CD = 327; BD = 268, und BDC = 162° 18′, so ist

$$B = \frac{17 \frac{42}{60} \times 327}{268 + 327} = 9° 44′;$$ also

C = 7° 58′, und

ABC = ABD — 9° 44′.

268 × cos. 9° 44′ = 264, 1, und

327 × cos. 7° 58′ = 323, 8; also

BC = 264, 1 + 323, 8 = 587, 9.

§. 31.

4. Aufgabe. Man könne, unter eben denselben Voraussetzungen, nur aus einem mehr oder weniger entfernten Punkte D (Fig. 7.) nach B und C hinsehen: den Gränzwinkel ABC, und die Gränzlinie BC zu finden.

Auflösung. Man nehme in D einen Zwischenstand, und messe aus B den Winkel ABD, aus D den Winkel BDC, auch die Linien AB, BD und CD (§. 30.), so ist in dem Dreyecke BCD

$$\text{cot. CBD} = \frac{\text{BD}}{\text{CD sin. BDC}} \pm \text{cot. BDC};$$ also

ABC = ABD — CBD, und

$$\text{BC} = \frac{\text{CD sin. BDC}}{\text{sin. CBD}}.$$

Z. B.

3. B. Es sey CD = 397; BD = 429, und BDC = 104° 33′, so ist

$$\begin{array}{rl} \log. 397 & = 2{,}5987905 \\ \log.\sin. 104°33′ & = 9{,}9858434 \\ \hline & -12{,}5846339 \\ \log. 429 & = 2{,}6324573 + 10 \\ \hline & 0{,}0478234 = \log. 1{,}116 \\ \cot. 104°33′ & = 0{,}25954 \\ \hline & 1{,}37555 = \cot. 36°1′; \end{array}$$

CBD = 46° 1′, und
ABC = ABD − 36° 1′,

$$\begin{array}{rl} \log. 397 \sin. 104° 33′ & = 12{,}5846339 \\ -\log. \sin. 36° 1′ & = 9{,}7693925 \\ \hline & 2{,}8152414 = \log. 653{,}5; \end{array}$$

BC = 653,5.

§. 32.

5. Aufgabe. Man könne, unter eben denselben Bedingungen, nur aus zweyen sehr nahen Punkten D und E (Fig. 8.) nach B und C hinsehen: den Gränzwinkel ABC, und die Gränzlinie BC zu finden.

Auflösung. Man nehme in D und E Zwischenstände, und messe aus B, C und D die Winkel ABC, BCD und CDE, auch die sie einschliessenden Seiten AB, BC, CD und DE. Aus dem Winkel CED, und den Seiten CE, DE berechne man den Winkel CDE und die Seite CD, und daraus, und aus der Seite BD den Winkel CBD und die Seite BC, auf die (§. 30.) schon

 bekann=

bekannte Weise. Wird noch der letztens gefundene Winkel CBD zum gemessenen ABD, nach Erforderniß, addirt oder davon subtrahirt, so erhält man zur Summe oder Differenz den zu findenden ABC.

Z. B. Es sey BD = 86,5; DE = 121; CE = 93,3; BDE = 167° 57', und CED = 175° 2', so ist

$$CDE = \frac{4\frac{58}{60} \times 93{,}3}{214{,}3} = 2^\circ\ 10'.$$

$$DCE = 4^\circ\ 58' - 2^\circ\ 10' = 2^\circ\ 48'.$$

$$CD = 120{,}9 + 93{,}2 = 214{,}1.$$

$$CDB = 167^\circ\ 57' + 2^\circ\ 10' = 170^\circ\ 7'.$$

$$CBD = \frac{9\frac{53}{60} \times 214{,}1}{300{,}6} = 7^\circ\ 3'.$$

$$DCE = 9^\circ\ 53' - 7^\circ\ 3' = 2^\circ\ 50'.$$

$$BC = 85{,}7 + 210{,}5 = 296{,}2.$$

$$ABC = ABD - 7^\circ\ 3'.$$

§. 33.

6. **Aufgabe.** Man könne, unter eben denselben Voraussetzungen, nur aus zweyen mehr oder weniger entfernten Punkten D und E (Fig. 9.) nach B und C hinsehen: den Gränzwinkel ABC, und die Gränzlinie BC zu finden.

Auflösung. Man messe aus den Standpunkten B, D und E die Winkel ABD, BDE und CED, auch die Seiten AB, BD, DE und CE, so ist, wenn B,

D und E die, den innern Winkeln CBD, BDE und CED entsprechenden äußern bedeuten,

$$\text{tang. } B = -\frac{DE \sin. D + CE \sin. (D + E)}{BD + DE \cos. D + CE \cos. (D + E)};$$

$$BC = -BD \cos. B - DE \cos. (B + D) - CE \cos. (B + D + E);$$

$$ABC = ABD - CBD.$$

Man kann sich dieser Methode auch im vorigen Falle (§. 32.) bedienen, wovon der sicherste Beweis dieß ist, daß, wenn man, was ich mehrmal that, mehrere Beyspiele nach beyden Methoden bearbeitet, immer einerley Resultate sich ergeben.

Z. B. Es sey BD = 588; DE = 478; CE = 364; D = 47° 39′, und E = 33° 1′, so ist

log. 478 = 2,6794279
log. sin. 47° 39′ = 9,8686700
2,5480979 = log. 353,3

log. 364 = 2,5611014
log. sin. 80° 40′ = 9,9942122
2,5553136 = log. 359,2

log. 478 = 2,6794279
log. cos. 47° 39′ = 9,8284393
2,5078672 = log. 322,0

log. 364 = 2,5611014
log. cos. 80° 40′ = 9,2099917
1,7710931 = log. 59,03

tang.

$$\text{tang.B} = -\frac{353,3 + 359,2}{588 + 322 + 59,03} = -0,7352 = \text{tang.}143^\circ 41'.$$

$B = 143^\circ\ 41'$.

$CBD = 36^\circ\ 19'$.

$$\begin{aligned} \log.\ 588 &= 2,7693773 \\ \log.\ \text{cos.}\ 36^\circ\ 19' &= 9,9062036 \\ \hline & 2,6755809 = \log.\ 473,8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log.\ 478 &= 2,6794279 \\ \log.\ \text{cos.}\ 11^\circ\ 20' &= 9,9914478 \\ \hline & 2,6708757 = \log.\ 468,7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log.\ 364 &= 2,5611014 \\ \log.\ \text{cos.}\ 44^\circ\ 24' &= 9,8539056 \\ \hline & 2,4150870 = \log.\ 260,1. \end{aligned}$$

$BC = 473,8 + 468,7 + 260,1 = 1202,6$.

$ABC = ABD - 36^\circ\ 19'$.

§. 34.

7. Aufgabe. Es seyen (Fig. 10.) A, B und C drey Marksteine. Man habe den mittlern B durch das Perpendikel BD an AC angemessen: den Gränzwinkel ABC, und die ihn einschliessenden Gränzlinien AB und BC zu finden.

Auflösung. Weil die Linien AD, BD und CD, den Bedingungen gemäß, bekannt sind, so ist

$\text{tang.}\,A = \frac{BD}{AD}$; $\text{tang.}\,C = \frac{BD}{CD}$; der erhabene Winkel $ABC = 2R + A + C$, und

$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2}$; $BC = \sqrt{AD^2 + BC^2}$

Z. B.

Z. B. Es sey AD = 200; BD = 81, und CD = 387, so ist

$$\begin{aligned} \log. 81 &= 1{,}9084850 + 10 \\ -\log. 200 &= 2{,}3010300 \\ \hline & 9{,}6074550 = \log.\ \text{tang}.\ 22^\circ\ 3'; \end{aligned}$$

$A = 22\ 3'$.

Und eben so $C = 11^\circ\ 49'$.

$ABC = 213^\circ\ 52'$.
$AB = 215,77$;
$BC = 395,36$.

§. 35.

8. Aufgabe. Der Markstein B (Fig. 10.) sey durch das Dreyeck ABC angemessen worden: den Gränzwinkel ABC zu finden.

Auflösung. Man fälle aus B auf AC das Perpendikel BD, so ist

$$AD = \frac{(AB + BC)\ (AB - BC)}{2\ AC} + \frac{AC}{2},$$ und

die Summe der Seiten des Dreyeckes ABC, = s angenommen,

$$BD = \frac{1}{2\ AC} \sqrt{s\,(s - 2\,AB)\ (s - 2\,BC)\ (s - 2\,AC.}$$

Hieraus ergiebt sich

$$\text{tang}.\ A = \frac{BD}{AD},$$ und $$\text{tang}.\ C = \frac{BD}{AC - AD};$$ also

der erhabene Winkel $ABC = 2\,R + A + C$.

Z. B.

Z. B. Es sey AB = 215,8; BC = 395,4; AC = 587, so ist

AB + BC = 611,2;

AB — BC = — 179,6;

2 AC = 1174; $\frac{1}{2}$ AC = 293,5.

log. 611,2 × — 179,6 = 5,0404896
— log. 1174 = 3,0696681
1,9708215 = log. 93,498

AD = 293,5 — 93,498 = 200.

s = 1198,2;

s — 2 AB = 766,6;

s — 2 BC = 407,4;

s — 2 AC = 24,2;

2 AC = 1174.

$\frac{1}{2}$ log. 1198,2 × 766,6 × 407,4 × 24,2 = 4,9784672
— log. 1174 = 3,0696681
log. 81,05 = 1,9087991
BD = 81,05.

$$\text{tang. } A = \frac{81,05}{200} = 0,40525 = \text{tang. } 22^\circ\ 3'\tfrac{6}{10}.$$

$$\text{tang. } C = \frac{81,05}{387} = 0,20943 = \text{tang. } 11^\circ\ 49'\tfrac{7}{10}.$$

ABC = 213° 53'.

Man findet hier den Winkel ABC etwas größer, als er sich im vorigen Paragraph, unter etwas verän-

derten

derten Bedingungen, auf andere Weise ergab. Es war dieß nothwendig, weil man hier auch die Linien AB und BC etwas größer annahm, als sie dort durch Rechnung ausgefallen. Und dieß mag nebenher zum Beweise dienen, daß die Seiten eines Dreyeckes, wenn sie einen Winkel zu finden dienen sollen, mit aller Schärfe gemessen werden müssen. — Man bestimmet sonst aus den gegebenen dreyen Seiten eines Dreyeckes jeden Winkel desselben unmittelbar, und nach einer kürzern Methode, als die hier gebrauchte ist, nichts desto weniger zog ich hier die letztere vor, weil sie, obschon durch Umwege, etwas näher zur Wahrheit führt.

§. 36.

9. Aufgabe. Der Markstein B (Fig. 10.) sey durch Winkel angemessen worden: die Gränzlinien AB und BC zu finden.

Auflösung. Weil in dem Dreyecke ABC die beyden Winkel A und C bekannt sind, so ist es auch B, und daher

$$AB = \frac{AC \text{ sin. } C}{\text{sin. } B};$$

$$BC = \frac{AC \text{ sin. } A}{\text{sin. } B};$$

Z. B. Es sey $AC = 587$; $BAC = 22^\circ\ 3'$; $ACB = 11^\circ\ 49'$, so ist

log.

$$\text{log. } 587 = 2{,}7686381$$
$$\text{log. sin. } 11^\circ\, 49' = 9{,}3112892$$
$$12{,}0799273$$
$$\text{log. sin. } 33^\circ\, 52 = 9{,}7460595$$
$$2{,}3338678 = \text{log } 215{,}70;$$
$$AB = 215{,}70.$$

Und eben so auch $BC = 395{,}44.$

§. 37.

10. Aufgabe. Es seyen (Fig. 11.) die Marksteine B, C und D an die Standlinie AE durch hineingeschlagene Perpendikel angemessen worden: man soll die Gränzwinkel ABC, BCD, CDE, und die sie einschliessenden Gränzlinien AB, BC, CD, DE finden.

Auflösung. Es seyen AM, AR, AN die gemessenen Längen, und BM, CR, DN die gemessenen Breiten der Marksteine B, C und D. Man ziehe diese und jene gehörig von einander ab, so ist

$$AB = \sqrt{AM^2 + BM^2};$$

$$BC = \sqrt{Bm^2 + Cm^2};$$

$$CD = \sqrt{Cn^2 + Dn^2};$$

$$DE = \sqrt{DN^2 + EN^2}, \text{ und ferner}$$

$$\text{tang. } BAM = \frac{BM}{AM};$$

tang.

$$\text{tang. } BCn = \frac{Bm}{Cm};$$

$$\text{tang. } DCn = \frac{Dn}{Cn};$$

$$\text{tang. } DEN = \frac{DN}{EN}; \text{ alſo}$$

der erhabene Winkel ABC = 2 R + BAM + BCm, der hohle BCD = 2 R — BCm — DCn, und wieder der erhabene CDE = 2 R + DCn + DEN.

Z. B. Es ſey AM = 141; AR = 269; AN = 408; AE = 523; BM = 130; CR = 94; DN = 164, ſo findet man

AB = 172,8; BC = 159,0; CD = 155,6; DE = 200,3, und auch BAM = 48° 46′; BCm = 13° 4′; alſo BAM + BCm = 61° 50′, und daher den erhabenen Winkel ABC = 180° + 61° 50′ = 241° 50′.

Auf ähnliche Weiſe findet man auch den hohlen Winkel BCD = 180° — 13° 4′ — 24° 18′ = 142° 38′, und wieder den erhabenen CDE = 180 + 24° 18′ + 54° 58′ = 259° 16′.

§. 38.

11. Aufgabe. Es ſeyen (Fig. 12.) die Markſteine B und C durch die Dreyecke ABD und ACD an die Standlinie AD angemeſſen worden: die Gränzwinkel

winkel ABC und BCD nebst der Gränzlinie BC zu finden.

Auflösung. Man fälle im Dreyecke ABD aus B auf AD das Perpendikel BM, so ist

$$AM = \frac{(AB + BD)(AB - BD)}{2\,AD} + \frac{AD}{2}, \text{ und,}$$

wenn $AB + BD + AD = s$ gesetzt wird, auch

$$BM = \frac{1}{2AD}\sqrt{s(s - 2\,AB)(s - 2\,BD)(s - 2\,AD}.$$

Bey gehöriger Anwendung dieser Formeln auf das Dreyeck ACD, lassen sich auch AN und CN berechnen. Zieht man nun AM von AN, und BM von CN ab, so ergeben sich Bn und Cn, und man erhält

$$BC = \sqrt{Bn^2 + Cn^2}.$$

Nun ist in den Dreyecken ABM, BCn und CDN

$$\text{tang. } BAM = \frac{BM}{AM};$$

$$\text{tang. } CBn = \frac{Cn}{Bn};$$

$$\text{tang. } CDN = \frac{CN}{DN}; \text{ also}$$

der

der erhabene Winkel ABC $= 2R + BAM - CBn$;
BCD $= 2R + CBn + CDN$.

Z. B. Es sey AB $= 197$; CD $= 224$; AD $= 498$; AC $= 408$, und BD $= 366$, so ist

$$AM = 249 - \frac{563 \times 169}{996} = 153{,}5, \text{ und}$$

$$BM = \frac{1}{996}\sqrt{1061 \times 667 \times 329 \times 65} = 123{,}5.$$

Eben so findet man auch AN $= 365{,}5$, und CN $= 180{,}8$.

Aus alle dem ergiebt sich BC $= 219{,}6$.

Ferner findet man BAM $= 38° \, 49'$, BCn $= 15° \, 7'$, und CDN $= 53° \, 46$; daher ist der erhabene Winkel ABC $= 180 + 38° \, 49' - 15° \, 7' = 203° \, 42'$, und der gleichfalls erhabene Winkel BCD $= 180° + 15° \, 7' + 53° \, 46' = 248° \, 53'$.

§. 39.

12. Aufgabe. Es seyen (Fig. 12.) die Marksteine B und C, jener durch die Winkel BAD und BDA, dieser durch die Winkel CAD und CDA an die Standlinie AD angemessen worden: die Gränzwinkel ABC, BCD, und die, sie einschliessenden Gränzlinien AB, BC und CD zu finden.

Auflösung. Man berechne in den Dreyecken ABD und ACD, aus den gemessenen Winkeln, und der gemeinschaftlichen Seite AD, die Seiten AB und BD, AC und CD, und verfahre dann, das Uebrige zu finden, wie eben (§. 38.) gelehrt ist worden.

§. 40.

13. **Aufgabe.** Es sey (Fig. 13.) die gebrochene Linie ABCDE eine gemeinschaftliche Gränzlinie zweyer Waldabschnitte. Die Linien AB, BC, CD und DE, und die von selben eingeschlossenen Winkel ABC, BCD und CDE seyen unmittelbar gemessen worden: man soll die Diagonale AE nebst den beyden ihr anliegenden Winkeln BAE und DEA durch Rechnung finden.

Auflösung. Es bedeuten A, B, C, D und E die äußern Winkel der Figur ABCDE, so ist

$$\text{tang. A} = \frac{\text{BC}\sin.\text{B} + \text{CD}\sin.(\text{B}+\text{C}) + \text{DE}\sin.(\text{B}+\text{C}+\text{D})}{\text{AB} + \text{BC}\cos.\text{B} + \text{CD}\cos.(\text{B}+\text{C}) + \text{DE}\cos.(\text{B}+\text{C}+\text{D})}.$$

Aus dem gefundenen Winkel A ergiebt sich

$\text{E} = (n+1)\,4\,\text{R} - (\text{A}+\text{B}+\text{C}+\text{D})$ und

$\text{AE} = -\text{AB}\cos.\text{A} - \text{BC}\cos.(\text{A}+\text{B}) - \text{CD}\cos.(\text{A}+\text{B}+\text{C}) - \text{DE}\cos.(\text{A}+\text{B}+\text{C}+\text{D})$.

Z. B. Es sey AB = 525; BC = 525; CD = 506; DE = = 415; B = 16° 33′; C = 10° 1′; D = 331° 4′, so ist

525 sin. 16° 33′ = 149,54;

506 sin. 26° 34′ = 226, 3;

415 sin. 2° 22′ = − 17,13;

525 cos. 16° 33′ = 503,25;

506 cos. 26° 34′ = 452,57;

415 cos. 2° 22′ = 414,64.

$$\text{tang. } A = \frac{149{,}54 + 226{,}3 - 17{,}13}{525 + 503{,}25 + 452{,}57 + 414{,}64}$$

$$= 0{,}1894 = \text{tang. } 10^\circ\ 44';$$

A = 169° 16′;

E = 720° − 56° 54′ = 193° 6′.

BAE = 10° 44′;

DEA = 13° 6′.

525 cos. 10° 44′ = 515,82;

525 cos. 5° 49′ = 522,29;

506 cos. 15° 50′ = 486,80;

415 cos. 13° 6′ = 404,20;

AE = 515,82 + 522,29 + 486,8 + 404,2 = 1929,11.

Vorbereitung zur Zeichnung des Umfangs.

§. 41.

Wären schon alle Seiten und Winkel am Umfange unmittelbar und mathematisch richtig gemessen worden, so würde man nun doch zur wirklichen Zeichnung

nung desselben noch nicht schreiten dürfen. Die Zeichnung, auf gewöhnliche Weise gemacht, würde mehr oder weniger unrichtig ausfallen, und die Figur, auch nur bey einer mittelmäßig grossen Anzahl von Seiten und Winkeln, nicht leicht können zum Schlusse gebracht werden. Die gewöhnliche Methode Winkel mit dem Transporteur aufzutragen, gewähret wenig oder keine Zuverläßigkeit; die Fehler, welche hier ganz unvermeidlich sind, häufen sich, und die Summe aller wird bald so merklich, als jeder einzelne für sich unmerklich seyn mochte. Der Grund liegt in der Unvollkommenheit der Sinne, und des Werkzeuges selbst, dessen wir uns zum Auftragen der Winkel bedienen. Bey dem zur Vermessung der Waldungen in Baiern angenommenen Maaßstabe, den $\frac{1}{2}$ baierischen F. zu 2000 gleichen Theilen, ist man im Auftragen der gemessenen Linien, vermöge der Unvollkommenheit des Auges, nie bis auf 2′ gewiß, wenn auch der Maaßstab mathematisch richtig getheilt wäre. Der gewöhnliche Transporteur giebt die Winkel höchstens zu 20 bis 30, und selbst der geradlinige, die Unvollkommenheit des Auges, und kleine Unrichtigkeiten der Theilung noch nicht eingerechnet, nur zu 6 bis 10 Minuten richtig an.

§. 42.

Und wäre auch eine schärfere Eintheilung dieses Transporteurs möglich, als er zur Zeit wirklich hat, so würden sich schon aus dem Gebrauche selbst häufige Fehler ergeben. Jede Linie, welche unter 500 F. lang ist, muß bey dem Anzeichnen eines Winkels, den Halbmesser zu 500′, bis zu dieser Größe verlängert werden.

den. Nun! Wird wohl jedes Mal die verlängerte, oder auch nur abgestochene Linie genau 500 F. lang seyn? Wird die verlängerte Linie mit der, wovon sie die Verlängerung ist, nach aller Schärfe eine und dieselbe Richtung haben? Wenn aber bey dem Auftragen jeder Linie, in Hinsicht ihrer Länge und Richtung, ein auch nur kleiner Fehler nothwendig begangen wird: ist es wahrscheinlich, daß bey der Zeichnung des Umfangs grosser Waldungen, die letzte Linie gerade da sich enden werde, wo die erste angefangen hat? oder daß wenigst der Anfang der einen, und das Ende der andern Linie nicht sehr merklich von einander abliegen? — So wenig es wahrscheinlich ist, daß die gezeichneten Linien und Winkel alle entweder zu groß oder zu klein ausfallen, und die Fehler jedes Mal zur möglich größten Summe anwachsen, so unwahrscheinlich ist es auch, daß alle begangene Fehler sich ganz oder nächstens gegen einander aufheben. Vielmehr kömmt nach den Gründen der Wahrscheinlichkeit die jedesmalige Summe der Fehler zwischen beyden Extremen in der Mitte zu stehen, und beträgt immer mehr oder weniger die Hälfte von der, welche sich ergäbe, im Falle, wo alle Fehler von gleicher Art, positiv oder negativ, wären. Kann man aber den Umfang einer Waldung mit keiner Zuverläßigkeit vermittelst der Transporteure zeichnen, wenn auch alle Seiten und Winkel desselben unmittelbar und mathematisch richtig gemessen worden wären, so kann man es jetzt noch um so weniger, als weder alle Seiten und Winkel unmittelbar, noch mathematisch richtig gemessen werden konnten.

§. 43.

Indem ich aber behaupte, daß vermittelst der Transporteure keine, unserer Absicht ganz entsprechende, richtige Zeichnung von grossen Waldungen erhalten werden könne, will ich darum diese Werkzeuge, vornehmlich den geradlinigen Transporteur, als untauglich auch andere Absichten zu erreichen, nicht verworfen haben. Es giebt allerdings Fälle, wo sich mit diesem Transporteur hinlänglich viele Richtigkeit in eine Zeichnung bringen läßt. Und die erste, oberflächliche Zeichnung aus den an dem Umfange gemessenen Stand- und Gränzlinien, auch Stand- und Gränzwinkeln zu verfertigen, mag selbst der gewöhnliche Transporteur genügen.

§. 44.

Eine vorläufige, oberflächliche Zeichnung der gemessenen Waldung ist dem Feldmesser in mancherley Hinsicht theils nützlich, theils auch nothwendig. Durch diese wird er, mit dem Laufe der Gränze näher bekannt, und lernt kennen, was entweder verbunden, oder von dem Ganzen abgeschnitten werden müsse; vornehmlich aber wird ihm die übrige Vorbereitungsarbeit gar sehr erleichtert. Zu dieser ersten Zeichnung wird daher ein so kleiner Maaßstab gewählt, als, der Deutlichkeit unbeschadet, möglich ist, und damit schon auf dem Lande, wie sich Stoff gesammelt hat, angefangen, und bis zu Ende der Vermessung fortgefahren, und die gemessenen Standlinien, wie die gemessenen, oder auf geometrische Weise daraus gefundenen

Gränz-

Gränzlinien, ohne Rücksicht auf Richtigkeit, in selbe eingetragen.

§. 45.

Wie nun diese erste Zeichnung vollendet ist, muß sich der Feldmesser zur zweyten vorbereiten, und zu diesem Ende

1) die gemessenen schiefen Linien auf den Horizont reduciren;

2) die gemessenen Winkel verbessern;

3) aus den gemessenen Standlinien und Standwinkeln die Gränzlinien und Gränzwinkel, welche er nicht unmittelbar messen konnte oder wollte, berechnen;

4) die nun berechneten Gränzwinkel, weil bey ihrer Berechnung die Sekunden vernachläßiget worden, mehrmal verbessern;

5) die schmalen Theile des Waldes, und andere, die zum Walde nicht gehören, aber sich in denselben hineinziehen, durch berechnete Diagonale, wo es nicht durch gemessene geschehen ist, oder geschehen konnte, von dem Ganzen abschneiden;

6) die Zahl der Winkel und Linien, und damit die Gefahr zu fehlen, so viel möglich, zu verhindern, mehrere Diagonale um die ganze Figur herum (*) be-

 rech-

(*) Bey Figuren von wenigen Seiten genüget es auch nur eine einzige Diagonale zu berechnen, oder wohl gar nur

rechnen, so daß dadurch eine neue Figur (Grundfigur) von wenigern aber längern Seiten, die alle nebst den Winkeln bekannt sind, entsteht;

7) über einer verlängerten Seite (Grundlinie) der Grundfigur die, mit jedem Eckpunkte ihres Umfangs, und wieder über jeder Seite desselben insbesondere die, mit jedem Gränzpunkte zusammen gehörige Länge und Breite berechnen, und endlich

7) die mit jedem Gränzpunkte zusammengehörige Länge und Breite, in so fern es die Figur zum sichern Schlusse zu bringen nöthig ist, verbessern.

Alle diese Forderungen, die letzte ausgenommen, zu erfüllen, ist der Feldmesser im Stande, wenn er sich in den vorausgeschickten praktischen Sätzen gehörig einstudiert hat, vornehmlich wenn er auch eigenes Nachdenken damit zu verbinden weis. Daher habe ich hier nur noch zu zeigen, wie die Fehler, welche von den gemessenen Gränzlinien in die berechneten Längen und Breiten übergegangen, möchten zu verbessern seyn, und damit die Figur zum vollkommenen Schlusse gebracht werden.

§. 46.

Keine Figur schließt sich, wenn die Winkel mehr oder weniger fehlerhaft sind, oder in Messung der Seiten

ten

---

eine Seite des Umfangs zu verlängern, um auf der einen oder andern, als auf der Grundlinie, die Längen und Breiten der Gränzpunkte bestimmen zu können.

ten etwas versehen worden ist. Es sind aber Fehler bey dem Messen der Linien unvermeidlich, und sind sie schon einzeln nicht beträchtlich, so werden sie es doch öfters in ihrer Summe. Das daher kommende Hinderniß im Schlusse der Figuren zu überwinden, werden selten Regeln angegeben. Die Feldmesser schweigen hier sehr ängstlich still, und scheinen nicht zu wissen, daß es im Allgemeinen unmöglich ist, eine Figur ohne alle gemachte Verbesserung zum richtigen Schlusse zu bringen. Man sieht es ihnen nur zu sehr an, daß sie allemal, wenn die Figur sich nicht schließt, in Verlegenheit kommen, und kein geprüftes, zuverläßiges Mittel wissen, sich mit Ehre heraus zu ziehen, obschon sie jenes vor den Profanen, und dieses selbst vor den Eingeweihten zu verbergen suchen. Einige geben sich auch dreiste das Ansehen, als hätten sie wirklich den Stein der Weisen gefunden, und wüßten die Zahl und Größe der Fehler so sehr zu vermindern, daß die Figuren allemal und richtig sich schliessen müßten, oder besäßen das unfehlbare Mittel mit dem Compasse, als einer geometrischen Wünschelruthe, alle in Messung der Winkel gemachte Fehler haarklein zu entdecken, um sie dann auf leichte Weise auch verbessern zu können. — Ich habe schon oben an seinem Orte ausführlich gezeigt, wie einzelne gröbere Fehler in Messung der Winkel theils vermindert, theils leicht entdeckt, und kleinere, welche zum Theil unvermeidlich sind, verbessert werden mögen; hier habe ich also nur noch zu zeigen, wie man auch die, in Messung der Linien begangenen kleinern Fehler zu entdecken, und in wie fern sie dem Schliessen der Figur hinderlich sind, auch zu verbessern,

zu

zu Werke gehen müsse. — Meine Methode ist von der Art, daß ich mich hierüber nicht wohl deutlicher als in einem Beyspiele erklären kann. Und hiezu wählte ich eben das, was ich in der Folge auch zur Erläuterung der bessern Methode Figuren zu zeichnen und zu berechnen brauchen werde.

§. 47.

Es sey (Fig. 14.) ABC...... NOP eine geradlinige Figur, deren alle Seiten und Winkel durch mittelbare und unmittelbare Messung bekannt sind; die Seiten:

AB	=	132,8	FG	=	1191,4	LM	=	123,3
BC	=	177,4	GH	=	514,6	MN	=	952,4
CD	=	309,5	HI	=	1247,2	NO	=	658,0
DE	=	804,1	IK	=	771,5	OP	=	249,4
EF	=	471,5	KL	=	390,4	PA	=	378,2, und

die verbesserten äußern Winkel:

A	=	77°	54′	F	=	56°	54′	L	=	36°	18′
B	=	46	30	G	=	97	8	M	=	344	38
C	=	45	10	H	=	353	35	N	=	349	39
D	=	33	44	I	=	9	6	O	=	10	8
E	=	326	39	K	=	107	10	P	=	265	27.

Nach der schon gegebenen allgemeinen Anleitung nahm ich mit dieser Figur die, der Zeichnung wegen, erforderlichen Vorarbeiten vor, zog die Diagonale FN und theilte dadurch die Figur in zwey Abschnitte, berechnete den Winkel α, welchen sie mit FG, und den Winkel β, welchen sie mit NO macht, und auf derselben

derselben von F nach N, die mit den Gränzpunkten G, H, I, K, L, M und N, und, von N nach F die, mit den Gränzpunkten O, P, A, B, C, D, E und F zusammengehörigen Längen und Breiten, nach ihren einzelnen Theilen. Diese Theile sind es, welche vor ihrer gehörigen Zusammensetzung verbessert werden müssen.

§. 48.

Der Kürze wegen, setze ich von dieser etwas weitläufigen Rechnung nur die gefundenen Resultate her:

$$\text{tang. } \alpha = -\frac{1523{,}96}{-61} = \frac{1523{,}96}{61} = 24{,}9829;$$

und daher $\alpha = 87^\circ\ 42'$; auch

$$\beta = 125^\circ\ 16'$$

Die mit den Gränzpunkten G, H, I, K, L, M und N auf der Diagonale FN zusammengehörigen, nach der Richtung FN gezählten Längen und Breiten, und derselben Theile sind:

Lit. der Gränzp.	Theile der Längen.	Theile der Breiten.	Ganze Längen.	Ganze Breiten.
G	+ 47,7	+1187,7	+ 47,7	+1187,7
H	— 512,79	— 43,36	— 465,09	+1144,34
I	—1246,7	+ 34,46	—1711,79	+1178,8
K	— 764,86	— 100,92	—2476,65	+1077,88
L	+ 163,03	— 354,73	—2313,62	+ 723,15
M	+ 107,82	— 59,81	—2205,8	+ 663,34
N	+ 680,7	— 666,2	—1525,1	— 2,86

Die mit den Gränzpunkten O, P, A, B, C, D, E F auf der Diagonale NF zusammengehörigen nach der Richtung NF gezählten Längen und Breiten, und derselben Theile sind:

O	— 379,91	+ 537,24	— 379,91	+ 537,24
P	— 177,58	+ 175,12	— 557,49	+ 712,36
A	+ 286,08	+ 247,37	— 271,41	+ 959,73
B	— 63,87	+ 116,43	— 335,28	+1076,16
C	— 171,56	+ 45,16	— 506,84	+1121,32
D	— 266,9	— 156,7	— 773,74	+ 964,62
E	— 348,49	— 724,66	—1122,23	+ 239,96
F	— 404,29	— 242,6	—1526,52	— 2,64

§. 49.

Daß die nun berechneten Längen und Breiten der Gränzpunkte noch einer obschon kleinen Verbesserung bedürfen, erhellet schon aus Betrachtung dieser Tabelle. Die Breiten der Gränzpunkte F und N sollten genau = o

seyn,

seyn, indeß jene = — 2, 64, und diese = — 2,86 ist. Auch sollten diese Gränzpunkte F und N eine gleiche, nur in der Richtung verschiedene, Länge haben, allein die von F beträgt 1526,52, die von N aber nur 1525,1. So klein diese Fehler in dem gewählten Falle immer sind, vornehmlich wenn auch der verjüngte Maaßstab, wie gewöhnlich, ziemlich klein angenommen wird, beweisen sie doch offenbar, daß im Allgemeinen keine Figur ohne alle Verbesserung sich vollkommen schliessen lasse. Ich werde daher zeigen, wie diese Fehler verbessert werden mögen, nicht als wenn ich glaubte, daß es in diesem besondern Falle sie zu verbessern der Mühe lohnte, sondern damit der angehende Feldmesser durch dieß auch größere Fehler auf ähnliche Weise zu verbessern in Stand gesetzt werde.

§. 50.

Da die Diagonale FN jetzt zu 1525,1, jetzt zu 1526,52 berechnet worden, so liegt sehr wahrscheinlich ihre wahre Länge zwischen beyden Angaben in der Mitte, und beträgt 1525,81. Es ist daher die erstere Angabe um eben so viel (0,71) zu klein, als die letztere zu groß ist, und diese muß um das verkleinert werden, um was jene vergrößert werden muß. Man vermehre daher jeden, den Gränzpunkten des ersten Abschnittes zugehörigen negativen Längetheil um $\frac{0{,}71}{7} = 0{,}1$, und vermindere um eben das jeden positiven; auch vermindere man umgekehrt jeden, den Gränzpunkten des zweyten Abschnittes zugehörigen negativen Längetheil um $\frac{0{,}71}{8} = 0{,}09$, und vermehre jeden positiven um eben

das,

das, so sind die Längetheile verbessert, und der Grund zur Verbesserung der Längen selbst schon gelegt. Ganz auf diese Weise werden auch die Breitetheile der Gränzpunkte in jedem Abschnitte verbessert. Vermindert man jeden negativen Breitetheil in dem ersten Abschnitte um $\frac{2,86}{7} = 0,41$, in dem zweyten um $\frac{2,64}{8} = 0,33$, und vermehrt um eben das jeden positiven, so ist auch schon die Verbesserung gemacht. Sind aber die verbesserten Länge- und Breitetheile der Gränzpunkte jedes Abschnittes gefunden, so werden auch die verbesserten Längen und Breiten selbst, allein durch gehöriges Addiren und Subtrahiren der Theile, was auch oben in Ansehung der unverbesserten geschah, daraus hergeleitet. Die verbesserten Längen und Breiten, und deren Theile sind diese:

Lit. der Gränzp.	Theile der Längen.	Theile der Breiten.	Ganze Längen.	Ganze Breiten.
G	+ 47,6	+ 1188,11	+ 47,6	+ 1188,11
H	— 512,89	— 42,95	— 465,29	+ 1145,16
I	— 1246,8	+ 34,87	— 1712,09	+ 1180,03
K	— 764,96	— 100,51	— 2477,05	+ 1079,52
L	+ 162,93	— 354,32	— 2314,12	+ 725,2
M	+ 107,72	— 59,4	— 2206,4	+ 665,8
N	+ 680,6	— 665,79	— 1525,8	+ 0,01
O	— 379,82	+ 537,57	— 379,82	+ 537,57
P	— 177,49	+ 175,45	— 557,31	+ 713,02
A	+ 286,17	+ 247,7	— 271,14	+ 960,72
B	— 63,78	+ 116,76	— 334,92	+ 1077,48
C	— 171,47	+ 45,49	— 506,39	+ 1122,97
D	— 266,81	— 156,37	— 773,2	+ 966,16
E	— 348,4	— 724,33	— 1121,6	+ 242,27
F	— 404,2	— 242,27	— 1525,8	0,00

§. 51.

Ich habe die Länge= und Breitetheile eines Abschnittes um gleichviel vermehrt oder vermindert, nicht weil ich glaube, daß bey Messung längerer und kürzerer Linien ohne Unterschied, was gegen Vernunft und Erfahrung ist, ganz gleiche Fehler begangen werden, sondern weil diese Methode weniger mühsam ist, und im Falle, wo die, in Hinsicht der Länge= und Breitetheile, sich ergebende Summe der Fehler von keinem Belange wäre, doch hinlängliche Richtigkeit gewährte.

Allein

Allein im entgegengesetzten Falle rathe ich dem Feldmesser sehr ernstlich, die gefundenen Summen der Fehler nur im Verhältnisse der jedesmaligen Längen der Gränzlinien unter die, mit selben zusammengehörigen Länge- und Breitetheile zu vertheilen. — Dadurch wird zugleich bewirkt, daß die schon verbesserten Gränzwinkel, indeß die Gränzlinien verkürzet oder verlängert werden, fast gänzlich ungeändert bleiben. Und diese Methode eine Figur zum Schlusse zu bringen, nimmt sich ganz besonders vor jener trivialen aus, deren sich alle Pfuscher bedienen, und nach welcher nur die letztern Winkel und Linien, und auch diese nur willkührlich und auf Gerathewohl abgeändert, also die Fehler nicht so sehr verbessert, als verstecket werden.

Zeichnung des Umfangs.

§. 52.

Bey größern Waldungen, wo es nöthig ist die Hauptfigur in eine Grundfigur aufzulösen, wird, wie natürlich, mit Zeichnung der letztern der Anfang gemacht. — Nachdem nun alle Eckpunkte derselben, durch die vorausgegangene Rechnung, ihrer Länge und Breite nach bestimmt sind, ist zur wirklichen Zeichnung mehr nicht erforderlich, als daß man

1) die, mit jedem Eckpunkte zusammengehörige Länge und Breite auf der gewählten Grundlinie auftrage, und

2) die so festgelegten Punkte durch gerade Linien zusammenziehe.

Der

Der Feldmesser, der alles, was bisher vorgetragen worden, hinlänglich verstanden, kann die Ausübung dieser Vorschrift nicht mehr schwer finden. Daher glaube ich auch mich der Mühe, dieselbe durch ein Beyspiel zu erläutern, überheben zu dürfen.

§. 53.

Die Zeichnung der Hauptfigur, oder vielmehr jedes Abschnittes insbesondere geschieht ganz auf eben dieselbe Weise. Ueber jeder Seite der Grundfigur werden die Gränzpunkte, vermittelst ihrer berechneten Längen und Breiten, und damit auch die Gränzlinien bestimmt; und indem man so von einem Abschnitte zum andern die Arbeit fortsetzt, entsteht allmählig die ganze Hauptfigur. Der Schluß der ganzen Hauptfigur hängt daher vornehmlich von dem Schlusse der Grundfigur, hernach aber von dem Schlusse jedes Abschnittes insbesondere ab. Was ich oben von Verbesserung der Linien und Winkel der Hauptfigur sagte, muß also auch von der Grundfigur, und zum Theil selbst von jedem einzelnen Abschnitte verstanden werden.

§. 54.

Die Figur, welche wir oben durch die Diagonale FN (Fig. 14.) in zwey Abschnitte theilten, und auf selber von dem einen und andern die Längen und Breiten der Eckpunkte berechneten, mag zum Beyspiele dienen, wie aus den berechneten Längen und Breiten aller Gränzpunkte über einer angenommenen Grundlinie ein Abschnitt, und selbst eine Grundfigur verzeichnet

net werden möge. — Man hat dabey nur vornehmlich dieß zu beobachten:

1) Daß die Längen aus dem Anfangspunkte der Diagonale, die negativen vorwärts, die positiven rückwärts, aufgetragen,

2) die Breiten aber aus dem Endpunkte der zugehörigen Länge senkrecht, die positiven aufwärts, die negativen abwärts, errichtet werden.

Berechnung des Inhaltes.

§. 55.

So wenig beschwerlich, wie wir eben gesehen, die Zeichnung einer Figur ist, wenn man sich vorläufig durch Berechnung der Längen und Breiten zur selben vorbereitet hat, so leicht ist nun auch die Berechnung ihres Inhaltes. Diese Längen und Breiten sind es, welche allein, ohne andere Linien, den Inhalt, wie den Umfang einer Figur bestimmen. Die Methode vermittelst dieser Linien den Inhalt jeder geradlinigen Figur zu finden, ist in jeder der beyden folgenden Formeln deutlich enthalten. Diese Formeln sind zwar nur auf die vorliegende Figur (Fig. 14.) und zwar die erste auf den ersten, die zweyte auf den zweyten Abschnitt derselben beschränkt, und darum nicht allgemein; indessen wird der denkende Leser bey aufmerksamer Betrachtung derselben leicht finden, wie er sie in jedem andern Falle modificiren müsse; sie sind:

$FGHIKLMN = \frac{1}{2} (- Fg.\, Gg + gh\, (Gg + Hh) + hi\, (Hh + Ii) + ik\, (Ii + Kk) - kl\, (Kk + Ll) - ml\, (Ll + Mm) - Nm.\, Mm)$; und

$NOPABCDEF = \frac{1}{2} (No.\, Oo + op\, (Oo + Pp) - pa\, (Pp + Aa) + ab\, (Aa + Bb) + bc\, (Bb + Cc) + cd\, (Cc + Dd) + de\, (Dd + Ee) + Fe.\, Ee)$.

Der Grund von der Construction dieser Formeln ist leicht einzusehen, wenn man jede mit dem Abschnitte, worauf sie sich bezieht, stückweise zu vergleichen sich die Mühe giebt. Auch ist es nicht schwer für einen gegebenen Fall selbst eine solche Formel zu construiren; wenn man nur auf die übereinstimmende oder entgegengesetzte Bezeichnung sowohl der Längen selbst, als ihrer Differenzen fleißig Acht hat. Nach diesen Formeln berechnete ich den Inhalt jedes Abschnittes, und fand den Inhalt

des ersten $= 59\frac{3}{8}$ M. 4777 Q. F.

den des zweyten $= 19\frac{2}{8}$ — 184 —

und daher den des Ganzen $= 78\frac{5}{8}$ — 4961 —

Diese Methode den Inhalt zu berechnen nimmt sich dadurch, daß nur allein berechnete Linien in Rechnung kommen, vor allen übrigen aus, nach welchen die hiezu nöthigen Linien erst mit dem Zirkel abgenommen, und auf dem verjüngten Maaßstabe gemessen werden müssen, und hat darum auch dieß eigen, daß die Berechnung des Inhaltes, zumal wenn die Figur nicht gar zu viele Seiten hat, unabhängig von der Zeichnung sich vornehmen läßt.

Die

Anwendung dieser Methode auf grosse Waldungen, in einem Beyspiele.

§. 56.

Ich könnte hier die Lehre von Messung des Umfangs schliessen, wenn ich nicht sicher wüßte, daß einige, bey dem Meßtische grau gewordene Feldmesser die Ausführbarkeit dieser Methode bezweifeln, und andere dieselbe, als eine theoretische Tändeley gar keiner Aufmersamkeit würdigen werden. Nun, diese theoriescheuen Leute mit einem Mal von dem Gegentheile zu überzeugen, will ich noch eine, erst dieses Jahr nach meiner Methode ausgearbeitete Messung einer grossen Waldung, im Auszuge, zur Schau ausstellen. Ich habe sie dem kurfürstl. Kammeral = Forstmesser, Herrn **Neebauer** zu verdanken. Dieser sehr geschickte, und unermüdet fleißige junge Mann übernahm aus freyem Willen die Prüfung dieser Methode über sich. So schnell er sie begriff, so schnell war er auch, sie in Ausübung zu bringen, entschlossen: und was er sich vorgenommen hatte, führte er auch bey erster Gelegenheit glücklich aus. Eine Waldung von mehrern tausend Morgen ward von ihm, ganz nach dieser Methode, aus dem Umfange vermessen, gezeichnet und berechnet. Was ich hier dem Leser auszugsweise mittheile, ist das Resultat seines Fleißes und seiner Geschicklichkeit. — Die Ausführbarkeit ist also erwiesen. Was ich in Hinsicht kleiner Figuren erfahren, erfuhr Herr **Neebauer** auch in Hinsicht der grossen, daß die Ausführung der Methode gar nicht schwer ist, wenigst für den Mathematiker. — Und soll denn nicht je-

jeder Feldmesser Mathematiker seyn? wie jeder Rechtsbeyständer Jurist seyn muß. Wer nach diesem Beweise noch immer fortschreyet: das ist nicht praktisch, der verdient keine fernere Antwort. Er widerlegt sich selbst, und giebt schon durch seinen Einwurf zu erkennen, daß er sein Metier gar nicht versteht.

Vorläufige Anmerkungen.

§. 57.

Die vorliegende Zeichnung (Fig. 15.) stellet das, diesen Sommer über vermittelst eines guten, von dem vortreflichen Mechanikus Herrn Reichenbach, dem Sohne, verfertigten Winkelmessers, aufgenommene, und polygonometrisch berechnete und verzeichnete Gerippe des kurfürstlichen Forstreviers Eglharding vor, das den einen, größern Theil von dem kurfürstlichen sogenannten Anzinger Forste ausmacht, welcher ganz nach dieser Methode vermessen und in Plan gelegt worden. Die Marksteine sind mit etwas größern Tüpfeln bezeichnet, und die Gränzlinien ganz ausgezogen, zum Unterschiede von den berechneten Längen und Breiten der Marksteine, welche getüpfelt sind. Noch andere ausgezogene Linien, welche die ganze Figur in gleiche Quadrate theilen, stellen Geräumte vor.

§. 58.

Dieser Forst, welcher beyläufig 93738,6 baierische Fuß im Umfange hält, ist zu $\frac{3}{5}$ von Privatwaldungen, zu $\frac{2}{5}$ von den Feldern der nahen Dorfschaften begränzet, und in allem nur mit 193 nummerirten Gränzsteinen gesichert. Und in diesem liegt der Grund,

 warum

warum man die Winkel und Linien am Umfange nicht alle unmittelbar messen konnte, und gezwungen war mehrmal aus den gemessenen Standwinkeln und Standlinien die Gränzwinkel und Gränzlinien, welche nicht gemessen werden konnten, durch Rechnung zu finden, wobey man sich meistens der polygonometrischen (*) Formeln, und nur hie und da der trigonometrischen, bediente. Weil man glaubte in dem gleich folgenden Gränzvermessnungsregister die gemessenen Gränzwinkel und Gränzlinien von den berechneten unterscheiden zu müssen, wurden daselbst ein Paar kleine Spalten der Anzeige dieses Unterschiedes gewiedmet, und in denselben die gemessenen Gränzwinkel und Gränzlinien mit g. die berechneten mit b. bezeichnet. Da ferner durch die zwey Hauptgeräumte, AB und das verlängerte DC, die ganze Waldung in 4 Distrikte zerfällt, und nicht nur diese beyden Linien, sondern auch die Winkel bey A, D, B, C mittelbar und unmittelbar gemessen werden können, mag jeder dieser 4 Distrikte für sich als ein Ganzes angesehen, und einer von dem andern sowohl in dem Gränzvermessungsregister als in der Berechnung getrennt werden.

Gränzvermessungsregister.

§. 59.

Das Eglhardinger Revier, welches ich hier nur allein als Beyspiel aufstelle, besteht aus zweyen Distrikten, dem ACD, welchen wir den ersten, und BCD, welchen wir den zweyten nennen.

Erster

(*) Dennoch vollendete Herr Neebauer diese ganze Arbeit in 5 bis 6 Wochen mit leichter Mühe.

Erster Distrikt.

Nummer od. Lit. des Gränzwink.	Gränzwinkel				Gränzlinien			Anmerkungen.
	Grade.	Minuten.	gemessene.	berechnete.	Fuß.	gemessene.	berechnete.	
C.	89	59	g.	—	10238	g.	—	
A.	106	40	g.	—	222,1	g.	—	
75	180	55	g.	—	444,4	g.	—	
76	161	10	g.	—	382,9	g.	—	
77	197	34	g.	—	435,6	g.	—	
78	167	45	g.	—	456,2	g.	—	
79	193	19	g.	—	341,4	g.	—	
80	192	21	g.	—	366,3	g.	—	
81	161	22	g.	—	455	g.	—	
82	176	54	g.	—	387,3	g.	—	
83	172	23	g.	—	430,1	g.	—	
84	180	18	g.	—	460	g.	—	
85	181	28	g.	—	480	g.	—	
86	190	59	g.	—	297,4	g.	—	
87E.	220	53	g.	—	494	g.	—	
88	181	16	g.	—	488	g.	—	
89	168	47	g.	—	453,8	g.	—	
90	173	48	g.	—	380,3	g.	—	
91	164	12	g.	—	446,2	g.	—	
92	190	33	g.	—	364,6	g.	—	
93	181	24	g.	—	366	g.	—	
94	151	39	g.	—	323,4	g.	—	
95	179	31	g.	—	114,2	g.	—	
96	115	56	g.	—	346,6	g.	—	
97	180	34	g.	—	313,1	g.	—	
98	184	17	g.	—	220,4	g.	—	
99	181	58	g.	—	522,6	g.	—	
100	201	17	g.	—	235	g.	—	
101	133	38	g.	—	128,8	g.	—	
102	200	32	g.	—	379,4	g.	—	
103	190	4	—	b.	413,9	—	b.	
104	162	28	—	b.	165,7	—	b.	

Nummer od. Lit. des Gränzwink.	Gränzwinkel				Gränzlinien			Anmerkungen.
	Grade.	Minuten.	gemessene.	berechnete.	Fuß.	gemessene.	berechnete.	
105	131	38	—	b.	227,2	g.	—	
106	186	23	—	b.	186,5	—	b.	
107	206	33	—	b.	268,2	—	b.	
108	175	9	—	b.	245,0	—	b.	
109	193	38	—	b.	172,8	—	b.	
110								Die Läufer bey den Nummern 110; 122; 128; 130 sind von den nächst vorhergehenden Marksteinen, der erste 7, der zweyte 137, der dritte 82, der vierte 66 F. entfernt.
111	165	46	—	b.	217,8	g.	—	
112	202	46	g.	—	251,2	g.	—	
113	197	43	g.	—	247	g.	—	
114F.	216	15	g.	—	146,2	g.	—	
115	201	57	g.	—	224	g.	—	
116	143	34	g.	—	145,4	g.	—	
117	191	28	g.	—	224,1	g.	—	
118	175	45	g.	—	120,6	g.	—	
119	195	13	g.	—	141,4	g.	—	
120	181	4	g.	—	189,1	g.	—	
121	157	54	g.	—	202,3	g.	—	
122								
123	157	38	g.	—	235,7	g.	—	
124	191	55	g.	—	246,5	g.	—	
125	187	7	g.	—	193,9	g.	—	
126	185	55	g.	—	173,2	g.	—	
127	152	3	g.	—	278,8	g.	—	
128								
129	155	46	g.	—	297,3	g.	—	
130								
131	188	43	g.	—	136,3	g.	—	
132	170	19	g.	—	171,4	g.	—	
133	196	55	g.	—	544,6	g.	—	
134	163	23	g.	—	204,2	g.	—	
135	186	26	g.	—	151,8	g.	—	
136	201	51	g.	—	153,3	g.	—	
137G.	185	5	g.	—	297,2	g.	—	
138H.	245	46	g.	—	237,4	g.	—	

Nummer od. Lit. des Gränzwink.	Gränzwinkel: Grade.	Minuten.	gemessene.	berechnete.	Gränzlinien: Fuß.	gemessene.	berechnete.	Anmerkungen.
139	168	43	g.	—	239,8	g.	—	
140	169	55	g.	—	205,6	g.	—	
141	129	31	g.	—	247,5	g.	—	
142	165	5	g.	—	330,9	g.	—	
143	165	43	g.	—	281,2	g.	—	
144	187	25	g.	—	176,4	g.	—	
145	158	11	g.	—	161	g.	—	
146	196	31	g.	—	262,7	g.	—	
147	195	57	g.	—	298	g.	—	
148	174	35	g.	—	300,6	g.	—	
149	218	36	g.	—	77,8	g.	—	
150	174	45	g.	—	55,0	g.	—	
151	117	50	g.	—	307,2	g.	—	
152	197	13	g.	—	459,4	g.	—	
153								Der Läufer ist ist 22 F. entfernt.
154	161	7	g.	—	1100	g.	—	
155	204	14	g.	—	454,6	g.	—	
156	160	34	g.	—	232,5	g.	—	
157	170	2	g.	—	267,6	g.	—	
158	183	16	g.	—	529,1	g.	—	
159	148	44	g.	—	237,9	g.	—	
160	170	24	g.	—	285	g.	—	
161	184	56	g.	—	322,1	g.	—	
162	190	43	g.	—	208,8	g.	—	
163	149	57	g.	—	222,3	g.	—	
164	182	53	g.	—	278	g.	—	
165	161	53	g.	—	523,8	g.	—	
166	180	49	g.	—	360,3	g.	—	
D.	114	56	g.	—	14137,7	g.	—	
Summe. 90 ∠	15840°	—						

Zwey=

Zweyter Distrikt.

Nummer od. Lit. des Gränzwink.	Gränzwinkel				Gränzlinien			Anmerkungen.
	Grade.	Minuten.	gemessene.	berechnete.	Fuß.	gemessene.	berechnete.	
C.	90	1	g.	—	141 7,7	g.	—	
D.	65	4	g.	—	104,9	g.	—	
167	205	33	g.	—	347	g.	—	
168	163	3	g.	—	2179	g.	—	
169	171	7	—	b.	2538,7	—	b.	
170	172	47	—	b.	970,7	—	b.	
171	153	22	—	b.	428,6	g.	—	
172	194	2	g.	—	518	g.	—	
173	230	35	g.	—	604,5	g.	—	
174	189	51	g.	—	382,8	g.	—	
175	138	3	g.	—	561,7	g.	—	
176	200	23	g.	—	491,1	g.	—	
177	219	44	g.	—	209,1	g.	—	
178	131	45	g.	—	332,2	g.	—	
179	160	46	g.	—	275,4	g.	—	
180	1[illegible]1	18	g.	—	252,8	g.	—	
181	181	12	g.	—	191,7	g.	—	
182	184	2	—	b.	3657,5	—	b.	
183	155	14	—	b.	1253,6	—	b.	
184	167	39	—	b.	3501,7	—	b.	
185	206	—	—	b.	1372,4	—	b.	
186	131	39	—	b.	1293	—	b.	
187	186	41	—	b.	728,8	—	b.	
B.	100	9	—	b.	12' 30,7	—	b.	
Sum̃e. 24 ∠	3960°	—						

Be=

Berechnung und Zeichnung des Umfanges.

§. 60.

Man folgte hier dem Winke, welchen die zwey mitten in C sich schneidenden Geräumte gaben, und reducirte die ganze, vielseitige Figur auf ein Viereck. Es mag dem Leser angenehm seyn zu erfahren, wie man diese Grundfigur erhalten habe; daher werde ich mich befleissen, das gebrauchte Verfahren, der vorgesteckten Kürze unbeschadet, so deutlich, als möglich ist, darzustellen.

§. 61.

Der erste Distrikt enthält zufälliger Weise vielmal mehr Gränzwinkel als der zweyte, 88 an der Zahl. Nicht weil es mühsamer gewesen wäre, diese alle mit einem Mal abzuschneiden, sondern weil man sich gerne einige Ruhepunkte verschaffen wollte, und öftere Gelegenheit die allenfalls eingeschlichenen Fehler aufzusuchen und zu verbessern, machte man aus dem Abschnitte ADHGFE vier Unterabtheilungen. Die drey ersten Unterabtheilungen können, jede für sich, als selbstständige, kleinere Abschnitte betrachtet, und die in selben befindlichen Marksteine an den, mit ihnen zusammengehörigen Längenlinien EF, FG, HD festgelegt werden; in der vierten bleiben also nebst den eignen zwischen A und E, noch die gemeinschaftlichen E, F, G, H zum Festlegen übrig.

§. 62.

Für die erste dieser Unterabtheilungen fand man den innern Winkel an E = 76° 26′, den an F =

22°

22° 4′, und die Längenlinie EF = 4916,22 F.; für die zweyte den innern Winkel an E = 27° 11′, den an G = 4° 53′, und die Längenlinie FG = 3808,98 F.; endlich für die dritte den innern Winkel an H = 111° 26′, den an D = 34° 2′, und die Längenlinie HD = 7133,54 F. Hieraus ergaben sich in der vierten Unterabtheilung die Winkel an E zu 144° 27′, an F zu 167°, an G zu 180° 12′, und an H zu 134° 20′, und wieder aus diesen und denen zwischen A und E, der Winkel an A zu 53° 17′, an D zu 44° 16′, und die Längenlinie AD zu 17492,61′ F.

§. 63.

Eigentlich und nach der Theorie sollten die jedesmaligen Endpunkte dieser Unterabtheilungen ganz und gar keine Breite haben; allein nach der Rechnung erhielt der Punkt F in der ersten Unterabtheilung + 0, 13, der Punkt G in der zweyten — 0, 65, der Punkt D in der dritten + 5, 36, und eben derselbe in der vierten — 3, 78 zur Breite. — Es ist zu merken, daß das Zeichen (+) die Lage der Breiten forstauswärts gegen die Gränze, das Zeichen (—) aber die Lage forsteinwärts gegen C bedeute.

§. 64.

Der zweyte Distrikt ließ sich als ein Vieleck von 23 Seiten leicht auf einmal berechnen, welches in der Richtung von D nach B geschah, wobey sich der innere Winkel an D zu 23° 19′, der an B zu 51° 55′, die Längenlinie DB zu 18966, 62 F., endlich die Breite des Punktes B zu + 3, 25 F. ergab.

§. 65.

§. 65.

Die Richtigkeit der, für AD und DB gefundenen Zahlen zu prüfen, berechnete man nun eben diese Linien trigonometrisch aus den, an C gemessenen Winkeln, und den sie einschliessenden Seiten CA, CD, CB, und fand AD = 17452,98, DB = 18960,79 F. Daher ergiebt sich in Ansehung der Linie AD eine Differenz von 39,63, in Ansehung der Linie DB aber eine von 5,83 F. in ihren auf doppelte Weise gefundenen Werthen. Natürlicher Weise gebührte den trigonometrisch gefundenen Werthen dieser Linien der Vorzug; daher vertheilte man die gefundenen Differenzen, als die Summen begangener kleiner Fehler verhältnißmäßig unter die Längetheile von AD und DB, um aus den verbesserten Längetheilen auch verbesserte Längen zu erhalten. Eben so vertheilte man auch die berechneten Breiten der Endpunkte, als Summen begangener kleiner Fehler, unter die Breitetheile, und erhielt durch derselben neue Zusammensetzung auch verbesserte Breiten. Auf diese Weise bekamen die, mit den Marksteinen zusammengehörigen Längen und Breiten alle eine angemessene Verbesserung; doch wo die zu machende Verbesserung von geringem oder fast gar keinem Belange war, begnügte man sich dieselbe nur an den letztern anzubringen. — Die Tabelle der Verbesserungen, welche zugleich zur völlig genauen Auftragung der ganzen Figur dienlich ist, erläutert dieß alles zur Genüge.

§. 66.

Natürlich hat die, an den zusammengehörigen Längen und Breiten vorgenommene Verbesserung Einfluß auf

die

die Lage der Gränz- oder Eckpunkte der Figur an ihrer gemeinschaftlichen Längenlinie, und damit auch auf die Entfernung des einen von dem andern, was in Ansehung der Linien EF, FG, HD, welche aus den verbesserten Länge- und Breitetheilen neu berechnet worden, die Tabelle der Verbesserungen deutlich anzeigt. Allein theils ist dieser Einfluß ganz unbeträchtlich, theils, insofern die merklichere Verrückung der Marksteine, Verbesserung eingeschlichener, unmerklicher Fehler ist, nothwendig und unsern Absichten gemäß, was von Nummer 87 bis 168 auch meistens der Fall war, wo, wegen der ungünstigen Lage des Bodens, Winkel und Linien nicht so genau als auf Ebenen gemessen werden konnten. Und so fiel auch umgekehrt in dem zweyten Distrikte, wo die unmittelbare Messung der Winkel und Linien durch nichts erschwert, und unsicher gemacht worden, so klein aus, daß sie, selbst an der längsten Gränzlinie zwischen Nummer 182 und 183 nur eine Veränderung von 1, 16 F. zu bewirken vermochte.

Berechnung des Inhaltes.

§. 67.

Die mit jedem Gränz- oder Eckpunkte zusammengehörigen Längen und Breiten, benutzte man aber nicht allein mehr Richtigkeit in die Zeichnung zu bringen, und sich des Schlusses der Figur ohnfehlbar zu versichern; sondern bediente sich derselben auch den Inhalt der Figur auf die möglich richtigste Weise zu berechnen. Daher hoffet man dem Leser auch dadurch gefällig zu werden, daß man in der Tabelle

der

der Verbesserungen auch der Berechnung des Inhaltes eine Rubrik wiedmete. Man erhält, wie bekannt, denselben stückweise, indem man jedes Paar Breiten, welche je zweyen nächsten Gränzpunkten zugehören, mit dem halben dazwischen liegenden Längetheile multiplicirt, und die erhaltenen Produkte, welche, nach Beschaffenheit des, als Faktor in Rechnung kommenden Längetheils, bald positiv, bald negativ sind, in eine algebraische Summe bringt.

§. 68.

Hätte man es sich schon nicht zum Gesetze gemacht, nach Möglichkeit Raum und Kösten zu sparen, so würde dennoch das, was bereits gesagt, und noch deutlicher in der Tabelle vorgestellet worden, dem denkenden Manne von Metier genügen, sich mit der eben vorgetragenen Methode so bekannt zu machen, als er es, um selbe in jedem andern Falle schicklich anwenden zu können, nöthig hätte. Allein da man in dieser Schrift bereits schon einen Theil der Arbeit niedergelegt hat, welche mit der Zeit für einen oder den andern Interesse haben dürfte, so wollte man von dem andern wenigst das letzte Resultat der Inhaltsberechnung mittheilen.

§. 69.

Man verfuhr mit dem zweyten Revier ganz so, wie mit dem ersten. Zu beyden Seiten des verlängerten Eglhardinger Hauptgeräumtes wurden wieder durch berechnete Diagonalen zwey Stücke abgeschnitten; das dazwischen liegende Dreyeck vollendete mit dem Dreyecke ADB das Viereck, welches zur Grundfigur an-

angenommen worden. Dieses Dreyeck wird (Fig. 16.) durch AB vorgestellt. Man fand den Inhalt dieses Dreyeckes aus der gemessenen Seite AB, und den berechneten, AF zu 1953[illegible],03 F., und BI zu 20881,17 F. auf sonst gewöhnliche Weise, den der beyden Abschnitte aber polygonometrisch, und in Summe den dieses und des erstern Reviers = $14363\frac{5}{8}$ M. 1175 Q. F.

Messung des Details.

§. 70.

Es sind zwar nicht alle Distrikte, Klassen, Parthien u. s. w. welche das Detail einer Waldung ausmachen, oder doch nicht allenthalben, mit geraden Linien begränzet: allein da es hier auf ein kleines **Mehr** oder **Weniger** nicht ankömmt, zu ängstliche Kopirung aufhält, und doch um das nicht näher zum Ziele führt, auch entgegengesetzte Fehler sich größtentheils aufheben; so begnüget man sich ihre Gränzen durchgängig als gebrochene Linien zu betrachten. Daher haben wir auch hier nur mit geradlinigen Figuren zu thun; und es müssen wieder Linien und Winkel, aber letztere mit andern Werkzeugen, und auf andere Weise, gemessen werden.

§. 71.

Es kömmt hier, schon vorläufig und vor aller Messung, sehr viel auf eine richtige und zweckmäßige Bestimmung der Gränzen jedes einzelnen Theiles einer Waldung, jedes Distriktes, jeder Klasse, Parthie u. s. w. an. Daher muß man die Strassen, Holzwege, Alleen und Geräumte aussuchen, welche zu Gränzen eines Distriktes dienen mögen, und im Falle, wo diese nicht hinlangten, auch künstliche Gränzlinien durchhauen lassen; doch mit dem wenigsten Holzaufwande, und, so viel es in anderer Hinsicht thunlich ist, nach solchen Richtungen, daß sie erweitert, nöthigen Falls auch zu Geräumten dienen mögen. Die Gränzen der

Klas=

Klassen, Parthien, Divisionen und Subdivisionen, der Blössen und leeren Schläge, und anderer nicht zum Holzboden gehöriger Plätze, sind alle schon von der Natur, wenigst für das geübte Aug des Forstmannes, mit hinlänglicher Deutlichkeit vorgezeichnet.

§. 72.

Ich ziehe bey Messung der Distrikte, der Klassen und Parthien, auch der leeren Schläge und Blößen, und alles dessen, was nicht zum Holzboden gehörig ist, den Tisch vor. So verwerflich einigen bey Messung des Umfanges der Tisch scheint; so verwerflich hinwieder scheinen mir, mit Einschluß der Boussole, alle Winkelmesser bey Messung des Details. Nicht nur halten sie sehr auf, erschweren und verdoppeln dem Forstmesser die Arbeit zu Hause und im Walde, sondern gewähren noch obendrein, vornehmlich die Boussole, weil die Winkel nur mit dem Transporteur aufgetragen werden, sehr wenig Richtigkeit.

§. 73.

Die Weise selbst mit dem Tische zu arbeiten darf keinem Forstmesser unbekannt seyn; sie beschränket sich auf diese einzige

Aufgabe. Eine geradlinige Figur aufzunehmen.

I. Wenn man innerhalb der Figur aus einem Stande nach allen Winkelspitzen hinmessen kann;

II. Wenn man nur am Umfange der Figur messen, aber doch sie ganz übersehen kann;

III. Wenn man die Figur nicht übersehen, und nur am Umfange messen kann.

Auf

Auf diese drey Hauptfälle lassen sich die alle zurückführen, welche bey Messung des Details gewöhnlich vorkommen. Die Vermessung der leeren Schläge, Blößen u. s. w. ist unter dem ersten, unter dem zweyten die Vermessung des jungen Anfluges oder Aufschlages, und die Vermessung alles übrigen ältern Holzes, wenn nicht etwa wegen seines dünnen Bestandes die Figur, theilweise und am Rande, übersehbar ist, unter dem dritten Hauptfalle enthalten. Bey Vermessung eines Distriktes kommen öfters alle drey vor.

IV. Wenn man an dem Umfange der Figur nicht messen, aber sie doch übersehen kann;

V. Wenn man an dem Umfange der Figur nicht messen, auch sie nicht übersehen kann.

Diese beyden Fälle ereignen sich selten; jener, wenn ein mit Sumpf umgebener Teich, und dieser, wenn ein Erlenort mit Sumpf umgeben, in Grund gelegt werden soll.

§. 74.

Es ist klar, daß die Auflösung dieser Aufgabe, nach Verschiedenheit des Falles, bald leichter, bald härter, und auch bald mehr, bald weniger richtig ausfällt. Leicht und richtig ist sie, wenn die erstern Fälle, mehr oder weniger unrichtig aber, wenn die letztern Fälle zu bearbeiten sind, sofern man nicht die gewöhnlichen Kunstgriffe verläßt, und bessere sich wählt. Für den ersten Fall ist die Auflösung der Aufgabe am leichtesten und richtigsten zugleich, da die Messung aus einem und demselben Stande geschieht, und die Fehler so an dem ganzen Umfange sich vertheilen, daß sie

nir=

nirgends durch ihre Anhäufung so leicht merklich werden. In dem zweyten Falle häufen sich die Fehler schon mehr; doch kann man sie entdecken, auch hinlänglich sich dagegen verwahren, wenn man jeden Eckpunkt nicht nur durch die gemessene, sondern noch durch eine andere ungemessene Visirlinie bestimmt, und so von Stelle zu Stelle sich prüft. Im dritten Falle findet wegen der Unübersehbarkeit der Figur diese Art der Prüfung nicht Statt; und es übriget kein anderes Mittel der Anhäufung unvermeidlicher Fehler vorzubeugen, oder auch vermeidliche frühe genug zu entdecken, als das, was in dem Gebrauche schicklich gewählter Richtpunkte, innerhalb oder außerhalb der Figur, besteht. Es ist dieses Prüfungsmittel theils so nothwendig, theils so das einzige, daß wo sich nicht schon Gegenstände vorfinden, welche zu Richtpunkten taugen, es zuweilen der Mühe lohnt, selbst solche sich setzen zu lassen; weil damit der gewiß sehr wichtige Vortheil verbunden ist, daß man dann nicht alle Seitenlinien zu messen nöthig hat. Weil in dem vierten Falle die Figur aus einer Standlinie aufgenommen wird, ist die Gefahr zu fehlen wieder nicht von Belange. Endlich in dem fünften Falle ist es rathsam, um beträchtliche Fehler zu vermeiden, daß die aneinander hangenden Standlinien trigonometrisch, die Seitenlinien der Figur selbst aber, nach der **Auerschen** Methode, geometrisch festgelegt werden.

§. 75.

Die schickliche Auswahl, Ordnung und Vermengung dieser Methoden in ihrer Anwendung ist ganz die Sache des Forstmessers; er muß wählen, ordnen und men=

mengen, wie es der Zweck seiner jedesmaligen Arbeiten fordert. Indem er aber die gegenwärtige Arbeit auf die möglich beste Weise verrichtet, muß er sich zugleich zu der nächstfolgenden vorbereiten, um desto leichter, und ohne Zeitverlust die aufzunehmenden Theile in ihre gehörige Lage bringen zu können. Daher soll er schon am Umfange der Waldung aus jedem Stande sich in das Innere derselben hinein zu arbeiten suchen, und zu dem Ende alle Stellen bemerken, in welchen die Gränzlinie von Strassen, Holzwegen, Alleen und Geräumten, auch andern Theilungslinien geschnitten wird. Thut er dieß auch, indem er einen Distrikt nach dem andern aus dem Umfange vermißt, legt er aus jedem Stande die Durchschnittspunkte der Theilungslinien mit dem Umfange, zum Theil auch ihre Richtungen, und selbst ihre Längen fest; so nähert er sich allmählig dem Ziele, das Detail wächst unter der Hand, und die Theile erhalten alle die gehörige Lage und Verbindung.

§. 76.

Noch haben wir nichts von Vermessung der Divisionen und Subdivisionen gesagt. Denn da die Bestimmung dieser Theile nur die Sache des Taxators ist, und seyn kann, so konnten sie kein Gegenstand dieser ersten Messung seyn, und daher von dem Forstmesser auch noch nicht in Plan gelegt werden. Allein, ist einmal die bisherige Messung in das Reine gebracht, von der Kammer genehmiget, und die Taxirung beschlossen worden; dann kömmt die Reihe auch an dieses veränderliche, kleine Detail. Die Messung desselben

ben wird füglich mit der Boussole, oder besser, wenigst auf ebenem Lande, allein mit Kette und Stäben vorgenommen; weil diese Werkzeuge hinlängliche Richtigkeit gewähren, und durch die wiederhohlte Aufstellung anderer Werkzeuge die Arbeit nur in die Länge würde gezogen werden.

§. 77.

Wegen der Zeichnung des Details habe ich nichts zu erinnern, und wegen der Berechnung desselben nur dieses einzige, daß die Inhalte der einzeln berechneten größern Theile, nach dem Inhalte des Ganzen, und wieder die Inhalte der kleinern Theile nach dem des größern verbessert werden sollen, damit alle kleine Theile dem zugehörigen grossen, und alle grosse Theile dem Ganzen gleich seyen.

§. 78.

Kleinere und größere Lücken, welche in diesem Unterrichte gelassen worden — gelassen werden mußten — mag sich der Anfänger in der Forstmeßkunst, selbst ausfüllen, durch fleißiges Lesen sowohl der besten Lehrbücher dieser Art, als des in seinem Lande gesetzlichen Meßunterrichtes.

S. 3. Z. 2. von unten lies, des Ganzen, statt der Gränzen.

Tab. 1.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.

Tab. 2.

Kurfürstl:
Forstrevier
Eglharding
Forstrevier Anzing
Hofmarx Ebersbergische Unterthans-Gehölze nach Vorder-Hofm. Riederingl. Gehölze
u. Hinter-Egglburg dann Forst u. Kirchscion gehörig
Riedering
Eglharding wo auch eine Salzniederlage sich befindet
Forsthaus
Neukirchen
Pöring
Gehölze
Dritte Unterabtheilung
des ersten Abschnitts
Zweyter Abschnitt
Vierte Unterabtheilung
Erste Unterabtheilung
Ebersberger Gemeinde Waldung
Das Eglhardinger Haupt-Geräumt
Das Ebersberger Am Preyssing Stern oder Sagwinkel Geräumt
Eustachs-Säule
Fig. 15.
Fig. 16.
Der halbe Baierb. Fuss zu 8000 Theilen
Ant. Fischer Sc. Mon.

Verbesserungstabelle.

Ersten Abschnittes vierte Unterabtheilung.

Betrag der Verbesserung der Längen im Ganzen	der Längen zu 100 F.	der Breiten im Ganzen	der Breiten zu 100 F.	Theile der Längen vor der Verbesserung	Theile der Längen nach der Verbesserung	Theile der Breiten vor der Verbesserung	Theile der Breiten nach der Verbesserung	ganze Längen vor der Verbesserung	ganze Längen nach der Verbesserung	ganze Breiten vor der Verbesserung	ganze Breiten nach der Verbesserung	Lit. und Nro. der Gränzpunkte	der Flächentheile Positivität	der Flächentheile Negativität	Inhalt Morgen	Inhalt □ Fuß
— 39,63	— 0,226	+ 3,78	+ 0,0037	— 132,78	— 132,39	+ 178,03	+ 178,04	— 132,78	— 132,39	+ 178,03	+ 178,04	75		—	2/8	1784
				— 259,96	— 259,38	+ 360,44	+ 360,45	— 392,74	— 391,77	+ 538,47	+ 538,49	76		—	2 2/8	2917
				— 312,24	— 311,54	+ 221,62	+ 221,63	— 704,98	— 703,31	+ 760,09	+ 760,12	77		—	5	2257
				— 263,57	— 262,98	+ 346,81	+ 346,82	— 968,55	— 966,29	+ 1106,90	+ 1106,94	78		—	6 1/8	510
				— 345,95	— 345,19	+ 297,39	+ 297,4	— 1314,5	— 1311,48	+ 1404,29	+ 1404,34	79		—	10 6/8	3433
				— 200,67	— 200,22	+ 276,2	+ 276,21	— 1515,17	— 1511,7	+ 1680,49	+ 1680,55	80		—	7 5/8	3388
				— 146,94	— 146,63	+ 335,53	+ 335,54	— 1662,11	— 1658,33	+ 2016,02	+ 2016,09	81		—	6 6/8	961
				— 299,39	— 298,72	+ 329,22	+ 329,23	— 1961,5	— 1957,05	+ 2345,24	+ 2345,32	82		—	16 2/8	1375
				— 275,69	— 275,08	+ 272,02	+ 272,03	— 2237,19	— 2232,13	+ 2617,26	+ 2617,35	83		—	17	2606
				— 343,49	— 342,72	+ 258,84	+ 258,85	— 2580,68	— 2574,85	+ 2876,1	+ 2876,2	84		—	23 4/8	1328
				— 365,92	— 365,11	+ 278,76	+ 278,77	— 2946,6	— 2939,96	+ 3154,86	+ 3154,97	85		—	27 6/8	995
				— 374,26	— 373,43	+ 300,55	+ 300,56	— 3320,86	— 3313,39	+ 3455,41	+ 3455,53	86		—	30 6/8	4162
				— 192,16	— 191,72	+ 226,99	+ 227	— 3513,02	— 3505,11	+ 3682,4	+ 3682,53	87 E		—	17	4177
				— 4766,01	— 4755,16	+ 1205,99	+ 1207,75	— 8279,03	— 8260,27	+ 4888,39	+ 4890,28	114 F		—	509 4/8	2689
				— 3808,15	— 3799,56	+ 79,77	+ 79,76	— 12087,18	— 12059,83	+ 4968,16	+ 4970,04	137 G		—	468 2/8	2228
				— 297,11	— 296,44	+ 7,26	+ 7,26	— 12384,29	— 12356,27	+ 4975,42	+ 4977,3	138 H		—	36 6/8	4145
				— 5108,32	— 5096,71	— 4979,2	+ 4977,3	— 17492,61	— 17452,98	— 3,78	0	D		—	317	4157
												Summe		—	1503 4/8	3112

Erste Unterabtheilung.

Betrag der Verbesserung der Längen im Ganzen	der Längen zu 100 F.	der Breiten im Ganzen	der Breiten zu 100 F.	Theile der Längen vor der Verbesserung	Theile der Längen nach der Verbesserung	Theile der Breiten vor der Verbesserung	Theile der Breiten nach der Verbesserung	ganze Längen vor der Verbesserung	ganze Längen nach der Verbesserung	ganze Breiten vor der Verbesserung	ganze Breiten nach der Verbesserung	Lit. und Nro. der Gränzpunkte	der Flächentheile Positivität	der Flächentheile Negativität	Inhalt Morgen	Inhalt □ Fuß
— 10,08	— 0,205	— 0,13	—	— 115,88	— 115,68	+ 480,22	+ 480,22	— 115,88	— 115,68	+ 480,22	+ 480,22	88		—	5/8	2779
				— 103,96	— 103,76	+ 476,8	+ 476,8	— 219,84	— 219,44	+ 957,02	+ 957,02	89		—	1 6/8	4591
				— 181,07	— 180,86	+ 416,11	+ 416,11	— 400,91	— 400,3	+ 1373,13	+ 1373,13	90		—	5 2/8	767
				— 188,52	— 188,11	+ 330,28	+ 330,28	— 589,43	— 588,41	+ 1703,41	+ 1703,41	91		—	7 1/8	4335
				— 318,34	— 317,73	+ 312,65	+ 312,65	— 907,77	— 906,14	+ 2016,06	+ 2016,06	92		—	14 6/8	907
				— 208,95	— 208,54	+ 298,78	+ 298,78	— 1116,72	— 1114,68	+ 2314,84	+ 2314,84	93		—	11 2/8	1486
				— 202,37	— 201,96	+ 304,97	+ 304,97	— 1319,09	— 1316,64	+ 2619,81	+ 2619,81	94		—	12 3/8	3395
				— 285,33	— 284,72	+ 152,24	+ 152,24	— 1604,42	— 1601,36	+ 2772,05	+ 2772,05	95		—	19 1/8	2523
				— 101,2	— 101	+ 52,91	+ 52,91	— 1705,62	— 1702,36	+ 2824,96	+ 2824,96	96		—	7	2648
				— 278,74	— 278,13	— 206	— 206	— 1984,36	— 1980,49	+ 2618,96	+ 2618,96	97		—	18 7/8	1960
				— 253,62	— 253,11	— 183,59	— 183,59	— 2237,98	— 2233,6	+ 2435,37	+ 2435,37	98		—	15 7/8	4634
				— 187,69	— 187,28	— 115,54	— 115,54	— 2425,67	— 2420,88	+ 2319,83	+ 2319,83	99		—	11 1/8	324
				— 454,8	— 452,64	— 258,53	— 258,53	— 2879,85	— 2873,52	+ 2061,3	+ 2061,3	100		—	24 1/8	1466
				— 228,05	— 227,64	— 33,54	— 33,54	— 3107,9	— 3101,16	+ 2027,76	+ 2027,76	101		—	11 5/8	328
				— 74,37	— 74,15	— 105,16	— 105,16	— 3182,27	— 3175,31	+ 1922,6	+ 1922,6	102		—	3 5/8	1560
				— 313,8	— 313,19	— 213,26	— 213,26	— 3496,07	— 3488,5	+ 1709,34	+ 1709,34	103		—	14 5/8	3771
				— 377,72	— 376,9	— 169,23	— 169,23	— 3873,79	— 3865,4	+ 1540,11	+ 1540,11	104		—	15 2/8	2349
				— 123,78	— 123,58	— 110,16	— 110,16	— 3997,57	— 3988,98	+ 1429,95	+ 1429,95	105		—	4 4/8	3546
				+ 0,13	+ 0,13	— 227,2	— 227,2	— 3997,44	— 3988,85	+ 1202,75	+ 1202,75	106	+		—	171
				— 20,63	— 20,63	— 185,35	— 185,35	— 4018,07	— 4009,48	+ 1017,4	+ 1017,4	107		—	4/8	2868
				— 145,68	— 145,48	— 225,19	— 225,19	— 4163,75	— 4154,96	+ 792,21	+ 792,21	108		—	3 2/8	1648
				— 115,21	— 115,01	— 216,22	— 216,22	— 4278,96	— 4269,97	+ 575,99	+ 575,99	109		—	1 7/8	3671
				— 114,91	— 114,71	— 129,05	— 129,05	— 4393,87	— 4384,68	+ 446,94	+ 446,94	111		—	1 3/8	3658
				— 100,4	— 100,2	— 193,28	— 193,28	— 4494,27	— 4484,88	+ 253,66	+ 253,66	112		—	7/8	100
				— 193,04	— 192,63	— 160,74	— 160,74	— 4687,31	— 4677,51	+ 92,92	+ 92,92	113		—	6/8	3378
				— 228,91	— 228,63	— 92,79	— 92,92	— 4916,22	— 4906,14	+ 0,13	0	114 F		—	2/8	618
												Summe		—	209 2/8	4139

Zweyte Unterabtheilung.

Betrag der Verbesserung der Längen im Ganzen	der Längen zu 100 F.	der Breiten im Ganzen	der Breiten zu 100 F.	Theile der Längen vor der Verbesserung	Theile der Längen nach der Verbesserung	Theile der Breiten vor der Verbesserung	Theile der Breiten nach der Verbesserung	ganze Längen vor der Verbesserung	ganze Längen nach der Verbesserung	ganze Breiten vor der Verbesserung	ganze Breiten nach der Verbesserung	Lit. und Nro. der Gränzpunkte	der Flächentheile Positivität	der Flächentheile Negativität	Inhalt Morgen	Inhalt □ Fuß
— 8,59	— 0,225	+ 0,65	—	— 130,05	— 129,83	+ 66,79	+ 66,79	— 130,05	— 129,83	+ 66,79	+ 66,79	115		—	—	4335
				— 146,56	— 146,23	+ 169,4	+ 169,4	— 276,61	— 276,06	+ 236,19	+ 236,19	116		—	4/8	2149
				— 141,84	— 141,51	+ 31,97	+ 31,97	— 418,45	— 417,57	+ 268,16	+ 268,16	117		—	4/8	1593
				— 204,46	— 204,01	+ 91,74	+ 91,74	— 622,91	— 621,58	+ 359,9	+ 359,9	118		—	1 4/8	4056
				— 113,39	— 113,17	+ 41,08	+ 41,18	— 736,3	— 734,75	+ 400,98	+ 401,08	119		—	1	3073
				— 115,64	— 115,42	+ 81,37	+ 81,47	— 851,94	— 850,17	+ 482,35	+ 482,55	120		—	1 2/8	984
				— 152,6	— 152,27	+ 111,69	+ 111,81	— 1004,54	— 1002,44	+ 594,04	+ 594,36	121		—	2	1998
				— 196,21	— 195,77	+ 49,28	+ 49,28	— 1200,75	— 1198,21	+ 643,32	+ 643,64	123		—	3	1200
				— 233,25	— 232,81	— 33,89	— 33,89	— 1434	— 1431,02	+ 609,43	+ 609,75	124		—	3 5/8	896
				— 246	— 245,56	+ 15,69	+ 15,69	— 1680	— 1676,58	+ 625,12	+ 625,44	125		—	3 6/8	1682
				— 190,48	— 190,04	+ 36,22	+ 36,22	— 1870,48	— 1866,62	+ 661,34	+ 661,66	126		—	3	2265
				— 165,91	— 165,58	+ 49,72	+ 49,72	— 2036,39	— 2032,2	+ 711,06	+ 711,38	127		—	2 6/8	3684
				— 273,43	— 272,76	— 54,47	— 54,47	— 2309,82	— 2304,96	+ 656,59	+ 656,91	129		—	4 5/8	1622
				— 250,74	— 250,18	— 159,74	— 159,61	— 2560,56	— 2555,14	+ 496,85	+ 497,3	131		—	3 4/8	4390
				— 124,73	— 124,51	— 54,97	— 54,97	— 2685,29	— 2679,65	+ 441,88	+ 442,33	132		—	1 3/8	3490
				— 142,98	— 142,76	— 94,52	— 94,52	— 2828,27	— 2822,41	+ 347,36	+ 347,81	133		—	1 3/8	1413
				— 521,46	— 519,72	— 154,96	— 154,86	— 3349,73	— 3342,13	+ 192,4	+ 192,95	134		—	3 4/8	527
				— 170,93	— 170,49	— 111,72	— 111,62	— 3520,66	— 3512,62	+ 80,68	+ 81,33	135		—	4/8	3370
				— 135,58	— 135,36	— 68,28	— 68,28	— 3656,24	— 3647,98	+ 12,4	+ 13,05	136		—	1/8	1391
				— 152,74	— 152,41	— 13,05	— 13,05	— 3808,98	— 3800,39	— 0,65	0	137 G		—	—	991
												Summe		—	39	109

Fortsetzung der Verbesserungstabelle.

Ersten Abschnittes dritte Unterabtheilung.

Betrag der Verbesserung der Längen im Ganzen	Betrag der Verbesserung der Längen zu 100 R.	Betrag der Verbesserung der Breiten im Ganzen	Betrag der Verbesserung der Breiten zu 100 R.	Theile der Längen vor der Verbesserung	Theile der Längen nach der Verbesserung	Theile der Breiten vor der Verbesserung	Theile der Breiten nach der Verbesserung	ganze Längen vor der Verbesserung	ganze Längen nach der Verbesserung	ganze Breiten vor der Verbesserung	ganze Breiten nach der Verbesserung	Lit. und Nro. der Gränzpunkte.	Positivität.	Negativität.	der Flächentheile Inhalt. Morgen.	der Flächentheile Inhalt. □ Fuß.
— 9,64	— 0,135	— 5,36	± 0,17	+ 86,75	+ 86,75	+ 220,98	+ 220,61	+ 86,75	+ 86,75	+ 220,98	+ 220,61	139	+		1/8	4563
				+ 42,26	+ 42,26	+ 236,05	+ 235,65	+ 129,01	+ 129,01	+ 457,03	+ 456,26	140	+		2/8	4314
				+ 0,24	+ 0,24	+ 205,60	+ 205,26	+ 129,25	+ 129,25	+ 662,63	+ 661,52	141	+		—	134
				— 190,75	— 190,48	+ 157,70	+ 157,44	— 61,5	— 61,23	+ 820,33	+ 818,96	142		—	3 4/8	1008
				— 300,7	— 300,3	+ 138,1	+ 137,87	— 362,2	— 361,53	+ 958,43	+ 956,83	143		—	6 5/8	1636
				— 310,3	— 310,3	+ 56,87	+ 56,78	— 672,5	— 671,83	+ 1015,3	+ 1013,61	144		—	7 5/8	708
				— 167,96	— 167,76	+ 53,92	+ 53,83	— 840,46	— 839,59	+ 1069,22	+ 1067,44	145		—	4 2/8	4576
				— 160,6	— 160,4	— 11,28	— 11,3	— 1001,06	— 999,99	+ 1057,94	+ 1056,14	146		—	4 2/8	313
				— 256,47	— 256,17	+ 56,86	+ 56,77	— 1257,53	— 1256,16	+ 1114,8	+ 1112,91	147		—	6 7/8	2849
				— 262,01	— 261,71	+ 141,97	+ 141,73	— 1519,54	— 1517,87	+ 1256,77	+ 1254,64	148		—	7 5/8	4800
				— 276,64	— 276,24	+ 117,61	+ 117,42	— 1796,18	— 1794,11	+ 1374,38	+ 1372,06	149		—	9	2733
				— 36,97	— 36,9	+ 68,46	+ 68,35	— 1833,15	— 1831,01	+ 1442,84	+ 1440,41	150		—	1 2/8	1889
				— 30,45	— 30,41	+ 45,8	+ 45,72	— 1863,6	— 1861,42	+ 1488,64	+ 1486,13	151		—	1	4481
				— 305,63	— 305,23	— 30,95	— 31	— 2169,23	— 2166,65	+ 1457,69	+ 1455,13	152		—	11 1/8	3827
				— 450,28	— 449,68	+ 91,07	+ 90,92	— 2619,51	— 2616,33	+ 1548,76	+ 1546,05	154		—	16 6/8	4820
				— 1090,71	— 1088,62	— 142,63	— 142,88	— 3710,22	— 3704,95	+ 1406,13	+ 1403,17	155		—	40 1/8	250
				— 435,24	— 434,7	+ 131,27	+ 131,05	— 4145,46	— 4139,65	+ 1537,4	+ 1534,22	156		—	15 7/8	3444
				— 232,25	— 231,95	— 10,75	— 10,77	— 4377,71	— 4371,6	+ 1526,65	+ 1523,45	157		—	8 6/8	4681
				— 261,2	— 260,9	— 58,45	— 58,55	— 4638,91	— 4632,5	+ 1468,2	+ 1464,9	158		—	9 5/8	4837
				— 522,07	— 521,40	— 85,96	— 86,09	— 5160,98	— 5153,9	+ 1382,24	+ 1378,81	159		—	18 4/8	1326
				— 180,59	— 180,33	— 154,87	— 155,12	— 5341,57	— 5334,23	+ 1227,37	+ 1223,69	160		—	5 6/8	4485
				— 182,37	— 182,11	— 219,02	— 219,37	— 5523,94	— 5516,34	+ 1008,35	+ 1004,32	161		—	5	2859
				— 226,63	— 226,37	— 228,88	— 229,25	— 5750,57	— 5742,71	+ 779,47	+ 775,07	162		—	5	1428
				— 171,94	— 171,67	— 118,47	— 118,67	— 5922,51	— 5914,38	+ 661	+ 656,4	163		—	3	2957
				— 209,4	— 209,13	— 74,63	— 74,75	— 6131,91	— 6123,51	+ 586,37	+ 581,65	164		—	3 1/8	4433
				— 266,23	— 265,93	— 80,04	— 80,17	— 6398,14	— 6389,44	+ 506,33	+ 501,48	165		—	3 4/8	3985
				— 429,86	— 429,32	— 299,32	— 299,83	— 6828	— 6818,76	+ 207,01	+ 201,65	166		—	3 6/8	899
				— 305,54	— 305,14	— 201,65	— 201,65	— 7133,54	— 7123,9	+ 5,36	0	D		—	6/8	754
												Summe		—	203 6/8	967
												Summe der 2ten Unterabtheilung		—	39	109
												— — — 1sten — — —		—	209 2/8	4139
												— — — 4ten — — —		—	1503 4/8	3112
												Das Dreyeck ACD		—	1809 2/8	908
												Summe des ersten Abschnittes		—	3764 7/8	4235

Zweyter Abschnitt.

Betrag der Verbesserung der Längen im Ganzen	Betrag der Verbesserung der Längen zu 100 R.	Betrag der Verbesserung der Breiten im Ganzen	Betrag der Verbesserung der Breiten zu 100 R.	Theile der Längen vor der Verbesserung	Theile der Längen nach der Verbesserung	Theile der Breiten vor der Verbesserung	Theile der Breiten nach der Verbesserung	ganze Längen vor der Verbesserung	ganze Längen nach der Verbesserung	ganze Breiten vor der Verbesserung	ganze Breiten nach der Verbesserung	Lit. und Nro. der Gränzpunkte.	Positivität.	Negativität.	der Flächentheile Inhalt. Morgen.	der Flächentheile Inhalt. □ Fuß.
— 5,83	— 0,031	— 3,25	± 0,036	— 96,33	— 96,3	+ 41,52	+ 41,51	— 96,33	— 96,3	+ 41,52	+ 41,51	167		—	—	1996
				— 228,26	— 228,19	+ 261,35	+ 261,27	— 324,59	— 324,49	+ 302,87	+ 302,78	168		—	1 7/8	3569
				— 1849,57	— 1849	+ 1152,1	+ 1151,69	— 2174,16	— 2173,49	+ 1454,88	+ 1454,47	169		—	81 1/8	4063
				— 2336,31	— 2335,6	+ 993,31	+ 992,95	— 4510,47	— 4509,09	+ 2448,19	+ 2447,42	170		—	113 7/8	1522
				— 933,95	— 933,67	+ 264,57	+ 264,48	— 5444,42	— 5442,76	+ 2712,76	+ 2711,9	171		—	60 1/8	3573
				— 474,03	— 473,88	— 90,57	— 90,6	— 5918,45	— 5916,64	+ 2622,19	+ 2621,3	172		—	31 4/8	3702
				— 517,18	— 517,03	+ 29,07	+ 29,07	— 6435,63	— 6433,67	+ 2651,26	+ 2650,37	173		—	34	2709
				— 357,02	— 356,92	+ 487,81	+ 487,63	— 6792,65	— 6790,59	+ 3139,07	+ 3138	174		—	25 6/8	2940
				— 169,91	— 169,85	+ 343,03	+ 342,92	— 6962,56	— 6960,44	+ 3482,10	+ 3480,92	175		—	14	2267
				— 521,9	— 521,75	+ 207,68	+ 207,61	— 7484,46	— 7482,19	+ 3689,78	+ 3688,53	176		—	46 6/8	496
				— 364,48	— 364,37	+ 329,14	+ 329,03	— 7848,94	— 7846,56	+ 4018,92	+ 4017,56	177		—	35	4051
				— 29,76	— 29,76	+ 206,97	+ 206,9	— 7878,7	— 7876,32	+ 4225,89	+ 4224,46	178		—	3	2806
				— 276,8	— 276,71	+ 183,68	+ 183,61	— 8155,5	— 8153,03	+ 4409,57	+ 4408,07	179		—	29 6/8	4293
				— 266,83	— 266,75	+ 68,18	+ 68,16	— 8422,33	— 8419,78	+ 4477,75	+ 4476,23	180		—	29 5/8	152
				— 252,07	— 251,99	— 19,25	— 19,26	— 8674,4	— 8671,77	+ 4458,5	+ 4456,97	181		—	28 1/8	583
				— 191,41	— 191,35	— 10,59	— 10,59	— 8865,81	— 8863,12	+ 4447,91	+ 4446,38	182		—	21 2/8	2036
				— 3657,08	— 3655,93	+ 55,32	+ 55,3	— 12522,89	— 12519,05	+ 4503,23	+ 4501,68	183		—	408 7/8	1497
				— 1146,11	— 1145,76	— 507,89	— 508,07	— 13669	— 13664,81	+ 3995,34	+ 3993,61	184		—	121 5/8	1957
				— 2823,93	— 2823,06	— 2070,59	— 2071,34	— 16492,93	— 16487,87	+ 1924,75	+ 1922,27	185		—	417 4/8	1177
				— 1350,49	— 1350,07	— 244,21	— 244,3	— 17843,42	— 17837,94	+ 1680,54	+ 1677,97	186		—	60 6/8	315
				— 673,67	— 673,46	— 1103,64	— 1104,03	— 18517,09	— 18511,4	+ 576,9	+ 573,94	187		—	18 7/8	3215
				— 449,53	— 449,39	— 573,65	— 573,94	— 18966,62	— 18960,79	+ 3,25	0	B		—	3 1/8	3978
												Das Dreyeck CDB			2232	4563
												Summe des 2ten Abschnittes			3819 7/8	2460
												— — — 1sten — —			3764 7/8	4235
												Inhalt der sämmentlichen Forstrevier Eglharding			7584 7/8	1695

Anfangsgründe

der

Goniometrie,

oder

analytischen

Trigonometrie und Polygonometrie,

mit Anwendungen

auf die Land- und Feldmeßkunst.

Von

G. A. Däzel,

öffentlichen Lehrer der Mathematik und Forstwissenschaft

zu München.

Mit zwey Kupfertafeln.

München,

bey Joseph Lindauer.

1800.

Dem

durchlauchtigsten Fürsten und Herrn,

Herrn

Maximilian Joseph,

Pfalzgrafen bey Rhein,

in Ober- und Niederbaiern Herzog,

des heil. röm. Reichs

Erztruchsesse und Kurfürsten,

Herzog zu Jülich, Cleve und Berg, Landgrafen zu Leuchtenberg, Fürsten zu Mörs, Grafen zu Veldenz, Sponheim, der Mark, Ravensberg und Rappoltstein, Herrn zu Ravenstein und Hohenack ꝛc. ꝛc.

meinem gnädigsten Fürsten und Herrn.

Durchlauchtigster Kurfürst,
gnädigster Herr, Herr!

Der Himmel hat uns in Eurer kurfürstl. Durchlaucht einen guten Regenten, einen wahren Vater des Vaterlandes geschenket, der Allen Alles zu werden, und das einzelne Beste seiner Unterthanen mit dem allgemeinen des Staates, nach Möglichkeit, zu verbinden suchet.

Ich glaube, mehr meinem Vaterlande Baiern Glück wünschen zu müssen, daß es seinen sehnlich gewünschten **Maximilian Joseph** erhalten hat, als Eurer kurfürstl. Durchl. zu dem neuen Erbe,

das

das noch voll der Wunden ist, die ihm der Krieg geschlagen hat.

Darf ich es wagen, Höchstdenselben diese kleine Schrift mit innigster Verehrung, und mit den wärmsten Empfindungen des Herzens zu überreichen? Sie zeuget von meinem Bestreben, Geschmack an der reinen und angewandten Mathematik unter meinen jungen Landsleuten zu verbreiten. Vieljährige Erfahrung hat es mich gelehrt, daß die Mathematik, über dieß, daß sie uns im Civil und Militär recht viele wesent-

sentliche Vortheile verschaffet, die jungen Leute zu einer ordentlichen, gründlichen Denkart gewöhnet, die sie dann in andere Wissenschaften, und selbst in ihre Amtsgeschäfte übertragen. Sie rächet sich oft empfindlich an dem Geschäftsmanne, der als Jüngling ihre Reitze verschmähte. Glücklich das Land, das viele ordentlich und gründlich denkende Köpfe zählt, die überall nicht sich, sondern die reine Wahrheit suchen.

Möch-

Möchten doch Eurer kurfürstl. Durchl. meine Bemühungen nicht unangenehm, und Höchst Ihrer Unterstützung würdig seyn.

Ich bin in tiefester Unterthänigkeit

Eurer kurfürstl. Durchl.

Unterthänig = gehorsamster

G. A. Däzel.

Vorrede.

Diese Schrift darf am wenigsten ohne Vorrede erscheinen. Den meisten Lesern muß eine kurze Geschichte der Goniometrie — so nenne ich die Wissenschaft, welche Trigonometrie und Polygonometrie in sich begreift — sehr willkommen seyn; alle können über den besondern Umstand, daß meine Schrift mit eines andern seiner von ähnlichem Inhalte, zu gleicher Zeit, und in dem nämlichen Orte erscheint, mit Recht einen Aufschluß fordern, und ein Paar moralische Worte dem jungen Leser an das Herz gelegt, können, in unsern Zeiten, auch nicht schaden. Ich werde mich befleißen, meinen Lesern, so viel in mir ist, Genügen zu leisten.

Der berühmte Lambert hat den Saamen, woraus diese neue Wissenschaft gekeimet, schon in seiner Anlage zur Tetragonometrie *) ausgestreut. Obschon er diese nicht selbst bearbeitete, zählte er doch alle mögliche dahin gehörige Fälle auf, und bestimmte damit die Zahl der Aufgaben, de-

*) Lamberts Beyträge zum Gebrauche der Mathematik. II. Theil. I. Abschnitt. Berlin 1770.

deren Auflösung, in so fern die Berechnung viereckiger Figuren sich zum Theil nicht eben so leicht, zum Theil gar nicht durch Trigonometrie bewirken läßt, gewiß größern Nutzen verspricht, als die bloße Uebung der Anfänger in der trigonometrischen Analysis seyn möchte, und auch, seit wir sie besitzen, wirklich gewähret hat.

Herr Tobias Mayer, jetzt Hofrath und Professor der Mathematik und Physik zu Erlangen, war der erste, der sich an dieses Lambertsche Pensum wagte. Er übergab uns seine Arbeit in der schon sehr selten gewordenen Schrift *), welche er, als ihm die Universität Göttingen im Jahre 1773 die Magisterwürde ertheilte, derselben feyerlich vorgelegt hat. — Doch er war schon zufrieden, das große tetragonometrische Problem für den Fall allein, wo nur die Seiten und Winkel des Vieleckes in Betrachtung kommen, gelöset zu haben, und überließ die Lösung des Problems für den zweyten, wo die Zerlegung des Viereckes durch Diagonalen mit in Betrachtung kömmt, dem Herrn Stephan Biörnsen.

Hr. B. bearbeitete recht nach dem Sinne des indessen verstorbenen Lamberts die ganze Tetragono-

*) Tetragonometriae Specimen I.... Joh. Tob. Mayer. Gött. 1773.

gonometrie. Seine äußerst mühesam abgefaßte Schrift *) beweiset zur Genüge, daß er bey mehr Unterstützung seinem Vaterlande recht viel Ehre in den mathematischen Wissenschaften hätte machen können.

Jetzt faßte Herr Lexell den nämlichen Gedanke an; doch er brach sich eine eigene Bahn, die ihn weiter führte, als selbst Lambert mochte gesehen haben. Er fand zwey Gleichungen, aus welchen er, wie aus einem Knaul Faden, die ganze Tetragonometrie, und überhaupt die Polygonometrie sehr geschickt zu entwickeln wußte. Der Witz und Scharfsinn dieses Mannes verdient unsere ganze Bewunderung, wie seine beyden in die Petersburger Commentarien eingerückten Abhandlungen **) die Aufmerksamkeit der Mathematiker längst verdient hätten. Ihm haben wir in dieser Erfindung einen wichtigen Zusatz zur reinen Mathematik zu verdanken, einen Zusatz, der beynahe zur Trigonometrie, wie die höhere Analysis zur niedern, sich verhält. Es ist diese Wissenschaft auch so reich an Stoff, daß man damit leicht mehrere Folianten anfüllen könnte; schon

*) Introductio in Tetragonometriam, ad mentem viri clarissimi *Lambert* analytice conscripta. Hafniae 1780.

**) De resolutione polygonorum rectilineorum. Commentarii novi Pretop. T. 19. 20.

schon die Tetragonometrie allein, wie sie Herr Biörnsen in gedrängter lateinischer Sprache abgefaßt hat, macht einen ziemlich starken Band aus: um wie viel mehr würde eine ähnliche Bearbeitung des Fünfeckes, Sechseckes u. s. w. betragen? denn die Zahl der möglichen Fälle nimmt in einem vielmal größern Verhältniße zu, als die Seitenzahl des Vieleckes.

Aber bey dieser für den Geist des Theoretikers so reich besetzten Tafel darf auch der Praktiker nicht hungern. Ist eben nicht alles brauchbar für ihn, was die Polygonometrie anbietet, ist es doch vieles. Und wäre auch vielmal weniger, als wirklich ist, in der Land- und Feldmeßkunst anwendbar, so wäre schon dieses Wenige von der Art, daß dessen Mangel sich durch keine Trigonometrie ersetzen ließ. Allerdings können mit Hilfe der Polygonometrie Aufgaben gelöset werden, welche außerdem keiner Auflösung fähig wären; und wo man auch mit der Trigonometrie zur Noth ausreicht, empfiehlt sich doch jene durch die mehrere Allgemeinheit ihrer Formeln, deren Gebrauch schon darum weniger ermüdet, weil die Arbeit gleichförmiger, und indem weniger dabey gedacht werden darf, auch weniger irrsam ist. Die Länge der polygonometrischen Formeln darf den Rechner eben nicht

schre-

schrecken; denn sie, und das leicht bemerkbare Gesetz des Fortganges der Glieder, erschweren nicht, erleichtern vielmehr seine Mühe. Allemal werden da, wo sich die Trigonometrie auch brauchen läßt, fünf, sechs, und mehrere trigonometrische Formeln erfordert, indeß eine einzige polygonometrische zureichet; und jene haben alle zusammen nicht weniger Glieder, sind nicht leichter zu bearbeiten, als diese einzige, vielmehr härter um das, als die Gedankenruhe, welche das Mechanische der Analysis begleitet, durch die, bey jedem Uebergange von einer Formel zur andern erforderliche Anstrengung des Geistes öfters unterbrochen wird, und von kürzerer Dauer ist. So viele trigonometrische Formeln zur Auflösung einer Aufgabe erforderlich sind, so vielmal muß man auch die Anwendung auf die neue Frage einrichten, und so vielmal kann man auch wechselweise der Mühe zu denken sich auf kurze Zeit überheben. Die längere und ununterbrochene Zeit, die man bey weniger Anstrengung des Verstandes mit Zifferrechnung zubringt, ist es also, was die Polygonometrie besonders werth macht.

Nun glaube ich, dem Leser auch sagen zu müssen, woher es komme, daß mein sehr guter Freund, Herr Markscheider Neumann und ich zu gleicher Zeit über Anwendung der Polygono-

metrie zu schreiben uns entschlossen haben. Der Fall ist zu sonderbar, als daß er sich nicht sollte Aufschlüsse wünschen. — Gerne, doch in aller möglichen Kürze will ich ihn seines Wunsches gewähren.

Seit mehrern Jahren dachte ich über eine Methode nach, wie Waldungen aus ihrem Umfange trigonometrisch gemessen, mit Zuverläßigkeit gezeichnet und berechnet werden möchten, und war in der Zwischenzeit so glücklich, zu der Guiotschen und Pickelschen einige nicht unbedeutende Zusätze zu machen, unter welchen der vornehmste der war, daß ich ein Mittel fand, eine aus dem Umfange gemessene und nach allen Seiten und Winkeln bekannte vielseitige Figur in eine einfache, leicht zu verzeichnende Grundfigur aufzulösen. Nun dieses Mittel theilte ich meinem Freunde mündlich mit. Er bezweifelte die Richtigkeit meiner Methode, und dachte selbst nach. Die Erfindung einer ganz allgemeinen, zur Auflösung dieser Aufgabe dienenden Formel lohnte gar bald seine Mühe. Ich freute mich über diese Bereicherung der Feldmeßkunst. Obschon auch ich die Ausführbarkeit einer so ganz analytischen Methode bezweifelte, wollte ich doch meinem gelehrten Freunde lieber auf sein Wort glauben, als über eine Sache aburtheilen, von der ich

noch

noch keine andere als historische Kenntniß hatte. Indessen bat ich ihn, seine nützliche Erfindung zu jedermanns Wissenschaft nur bald durch den Druck bekannt zu machen. — Er that es nicht, sondern, vermuthlich weil er die Fruchtbarkeit seiner Grundgleichungen schon frühe hatte kennen gelernt, suchte nur noch tiefer in die Polygonometrie einzudringen. Was er nun von Zeit zu Zeit erfand, ließ er mich allemal, obschon nur historisch, wissen, nämlich nur die Aufgaben, nicht auch deren Auflösungen. Doch hoffte ich auch diese durch die baldige Herausgabe zu erfahren. Schon lag seine Schrift fast ein Jahr zum Druck fertig; noch zauderte er, sie unter die Presse zu geben. Nun dieses spannte meine Wißbegierde auf das höchste, nöthigte mich selbst Hand anzulegen, und nachdem ich bereits schon so glücklich gewesen war, das Problem von Messung, Zeichnung und Berechnung großer Waldungen *) aufzulösen, auch durch fernere Anwendungen der Polygonometrie meine Kräfte zu prüfen.

Indem ich aber dieß that, war noch keineswegs meine Absicht, das Gefundene durch den Druck bekannt zu machen; weil ich nicht wußte, wie

*) Ueber die zweckmäßigste und zuverläßigste Methode, große Waldungen zu messen, zu zeichnen, und zu berechnen. München 1799.

wie weit meine Kräfte hinreichen würden: allein nachdem die Arbeit so weit glücklich gediehen war, daß ich hoffen durfte, einigen meiner Zuhörer, welche sich zu Feldmessern bilden wollten, durch die Herausgabe einen Dienst zu erweisen, ließ ich mir nichts so sehr angelegen seyn, als wie ich diese kleine Schrift den Kräften meiner jungen Leser gehörig anpassen möchte. Und zu diesem Ende verband ich Polygonometrie mit Trigonometrie, und leitete beyde aus einer gemeinschaftlichen Quelle ab, machte auch von jeder mancherley Anwendungen auf die Land- und Feldmeßkunst, und beleuchtete die mehrsten mit Zahlenbeyspielen. Ich wollte nämlich das Erworbene wieder mittheilen, gemeinnützig und für jedermann genießbar machen; denn ich schreibe wahrlich nicht wegen des eiteln: Digitis monstrari, et dicier, hic est, sondern um meinen Lesern zu nützen, vorzüglich jenen, die meine Zuhörer waren, oder künftig seyn werden. Und darum habe ich mit dieser Schrift, auch ehe sie noch zum Drucke bestimmt war, nicht zurückgehalten, vielmehr einigen meiner Zuhörer sie selbst zum Abschreiben dargeboten. Mich lohnte schon zureichend das erhabene geistiche Vergnügen, was mir bey Verfassung dieser Schrift öfters geworden war, und von der Art ist, daß ich es um das gewöhnliche

Schrift-

Schriftsteller-Interesse keineswegs vertauschen möchte. So mancherley ich in meinem Leben studirt habe, habe ich doch an nichts so großes, eines unsterblichen Geistes würdiges Vergnügen empfunden, als das ist, was uns die Analysis gewähret. Durch sie sind wir im Stande, Kenntnisse, die wir hie und da zu unsern Absichten brauchen, und zu deren Erforschung noch niemand vor uns Veranlassung gehabt hat, wie aus uns selbst zu erfinden: und ist dieses nicht das größte Vergnügen *), dessen wir Sterbliche hienieden fähig sind?

*) Ist es erlaubt, von der Größe des Vergnügens, das dem menschlichen Geiste eine Wissenschaft gewähret, auf deren Erhabenheit zu schließen, so steht die Kunst, eine Blüthe zu analysiren, die auch Reitze für Kinder hat, und ihrem Alter und Verstande ganz angemessen ist, sicher hinter der mathematischen Analysis, an der nur der Geist des Mannes Geschmack findet, sehr weit zurück. Wir bedürfen aber dieses Beweises nicht; der triftigste Beweisgrund liegt schon in der Natur der Sache selbst. Die mathematische Analysis fordert von dem Manne sehr viel Witz und Verstand, überhaupt einen schöpferischen Geist; was kann die botanische von dem Kinde fordern? — Jener Freund, nicht der Künste und Wissenschaften, sondern einzelner Künstler und Gelehrten, welche zu ihm eine nicht chemische, sondern politische Verwandtschaft haben, muß das Vorzügliche der mathematischen vor der botanischen Analysis gar nicht gekannt haben, als er einem Mathematiker von Profeßion die Fähigkeit eine Baum-

sind? Ich habe es genossen, ohne meinen Freund des seinigen zu berauben. Meine Schrift soll ihm die Ehre der Erfindung nicht streitig machen; soll ihn in dem frohen Bewußtseyn, eine der nützlichsten Wissenschaften über ihre bisherigen Gränzen erweitert zu haben, nicht im mindesten stören: so wie ich hinwieder hoffe, keiner unedlen Handlung von ihm beschuldiget zu werden. Er reitzte meine Wißbegierde, und ich befriedigte sie aus mir selbst, nicht aus seinem Eigenthume, auf Kosten seiner Ehre, die mir so heilig ist, als ihm die meinige seyn muß. Ich gab ihm Anlaß über das

---

Baumblüthe zu analysiren schlechthin absprach, und damit den Mann bis unter das Kind herunter würdigte. Diese kleinliche Handlung zeuget von einem sehr beschränkten Geiste, der bleyschwer an dem Sinnlichen der bildenden Künste hängt, und das Uebersinnliche der erhabensten unter den natürlichen Wissenschaften noch gar nicht geschmecket hat; sie zeuget von besonders großer Eingenommenheit für das, was man selbst weiß und liebt, und gegen alles, was man nicht selbst weiß und liebt. Es fällt nämlich dem stolzen Kunstliebhaber oder Gelehrten allemal sehr empfindlich, wenn er an einem Manne, der mit ihm in keiner nähern Verbindung, als jeder Mensch mit dem andern, steht, gewisse Kenntnisse, die ihm oder seinem Freunde mangeln, anerkennen, und ihm vor diesem den Vorzug einräumen soll: allein dieser unedle Stolz, diese Ehrsucht sollte in der Republik der Gelehrten schon gar nicht geduldet werden; sie ist wahres Unkraut, das der Feind unter den guten Saamen gesäet hat.

das Problem von Vermessung der Waldungen aus dem Umfange nachzudenken, und er mir die von Hrn. Lexell schon erfundene Polygonometrie, so weit sie zu meiner Absicht diente, neu zu bearbeiten, und auf die Land- und Feldmeßkunst anzuwenden. Es gab also einer dem andern, was — si parva licet componere magnis — dem großen unsterblichen Newton der vom Baum fallende Apfel gab — Anlaß. Der sachkündige Leser, dem es angenehm seyn mag, hie und da die nämliche Sache von zweyen bearbeitet zu lesen, soll richten zwischen mir und meinem Freunde.

Ich wiederhole es noch einmal. Ich schreibe weder der Ehre, noch des Geldes wegen, sondern aus der reinsten Absicht, jungen Feldmessern Gelegenheit zum städen Fortschreiten in der Mathematik zu verschaffen, damit sie nicht auf der betrettenen Bahn zurückbleiben, oder wohl gar dieselbe verlassen, und gewissen After-Mathematikern sich zugesellen mögen, welche, ohne Mathematik zu verstehen, dennoch mit selber Wucher treiben. So mächtige Reitze dieser ihr Beyspiel auf junge Leute hat, welche gierig nach beßerm Auskommen trachten; so sehr muß man sie dagegen zu waffnen suchen. Was kann mehr verführerisch seyn, als sehen, daß Männer, welche kaum die mathematische Sprache ver-

 stehen,

stehen, noch viel weniger sie selbst sprechen können, dennoch Mathematiker, Geometer, Ingenieur, Architekte und Hydrauliker heißen; daß Männer, die nichts weniger sind, als das, was sie heißen, nur durch ihren ansehnlichen Vorrath von Büchern, die sie nicht verstehen, von Instrumenten, die sie nicht zu brauchen wissen, überhaupt durch ihren gelehrten Flitterstaat bey Profanen sich in Ansehen gesetzt haben; daß Männer einem so erbettelten Ansehen ihre ganze politische Existenz, Chargen, Gagen, Besoldungen, Titel, ihr Alles zu verdanken haben. — Es ist wahr, daß viele Menschen mit dem einzigen Talente, Dummdreistigkeit, in der Welt sich fortbringen: allein was kostet es sie Mühe, wie viel Sorgen und Kummer? welche Demüthigungen müssen sie sich gefallen lassen, bis sie zu ihrem Zwecke gelangen: und wenn sie denselben erlangt haben, wenn sie nun sind, was zu seyn sie Ehre und Vermögen opferten, wie viel bleibt nicht ihnen noch zu leiden übrig, daß sie den mühsam errungenen Platz auch behaupten mögen? — Wie peiniget sie nicht das Bewußtseyn, wenn sie noch nicht alle Schamhaftigkeit ausgezogen haben, daß sie ihrem gelehrten Amte nicht gewachsen sind; daß sie sich andern von minderm Range vertrauen müßen? Wie ziehen sie sich in ihren Hinter-

halt

halt zurück, wenn sie mit einem Eingeweihten zu thun haben? Zu welchen niedrigen Kunstgriffen müssen sie dann ihre Zuflucht nehmen, daß nicht ihr blaßes Faulholzlicht durch den Glanz und Schimmer wahrer Gelehrsamkeit verdunkelt werde? Sie erlauben sich die schwärzesten Verläumdungen als Mittel, geschickte Männer, die ihrem angemaßten Stolze Abbruch thun dürften, von sich zu entfernen; sie stellen Leute an, die entweder eben so unwissend, wie sie selbst, oder doch auf ihren Verstand Verzicht zu thun, allerwenigst ihr weniges Wissen ihnen als Darlehen unverzinslich zu überlassen bereitet sind. — Die elenden Krücken! auf denen diese Herren einhergehen!

Ist dieß nicht Beweggrund genug für Jünglinge oder junge Männer, welche reine oder angewandte Mathematik zu ihrem Metier brauchen, sich darin gründlich, nicht oberflächlich, einzustudiren? — Nur gründliches Studium wird sie aus mancher Verlegenheit ziehen, gegen manche Demüthigung schützen; nur dieses gewähret uns das tröstliche Bewußtseyn, unsern Posten mit Ehren, und zum Wohl des Staates behauptet zu haben. Dieses, das Wohl des Staates, nicht Befriedigung unserer Begierden, und Erhöhung des sinnlichen Genußes, soll uns antreiben, Aemter und Bedienstungen zu suchen. So lange unsere

sere jungen Leute, sagt ein wahrhaft großer Mann, dem Staate kein Opfer zu machen bereitet sind, die wahre Weisheit verschmähen, nur Rang, gute Besoldung und ein Weib zum Ziele ihres rastlosen Strebens setzen, wird es nimmer beßer gehen. Werden meine jungen Leser mit den mathematischen Wissenschaften auch wahre Weisheit zu verbinden suchen, so hat sich der Staat in ihnen sicher rechtschaffene Diener zu versprechen. Gelehrte Männer können dem Staate nützen; aber nur Männer, die gelehrt und weise sind, nützen ihm wirklich. Der Gelehrte suchet nur sein einzelnes Beste, der Weise auch das des Staates; jener will alle seine Begierden befriedigen, dieser, wo es das allgemeine Beste fordert, weiß sie auch zu beschränken. Ich schließe mit Kästner, dem großen Dichter, und noch größern Mathematiker:

Pracht, Reichthum, eitle Lust kann sie uns nicht gewähren:
Was giebt die Weisheit uns? den Geist, das zu entbehren.

Den 5. Hornung 1799.

Der Verfasser.

Goniometrie.

Erklärungen und Begriffe von den goniometrischen Linien.

§. 1.

Jede geradlinige Figur zählt so viele Seiten, als Winkel, und besteht daher aus zweymal so vielen Stücken, als sie Seiten hat.

§. 2.

Sind von 2n Stücken einer n seitigen Figur alle, drey ausgenommen, bekannt, so können diese aus jenen bestimmt werden, planimetrisch, oder goniometrisch. Die Goniometrie lehret also aus so viel Seiten und Winkeln, als zur Bestimmung einer geradlinigen Figur erfodert werden, wenn sie in Zahlen gegeben sind, die übrigen durch Rechnung zu finden.

§. 3.

Es zerfällt diese Wissenschaft in zwey Haupttheile: die Trygonometrie, welche nur Dreyecke, und die Polygonometrie, welche alle mehrseitige Figuren zu ihrem Gegenstande hat.

 §. 4.

§. 4.

Die Winkel und Seiten einer Figur sind zwar ungleichartige Größen, und können daher, als solche, nicht miteinander verglichen werden: allein, indem man die Größen der Winkel durch Verhältnisse gerader Linien, welche sie bestimmen, ausdrückt, werden die Winkel auf gewisse Weise mit den Seiten gleichartig, und folglich der Vergleichung mit eben denselben fähig gemacht.

§. 5.

Man wählte zu Linien, deren Verhältnisse die Größen der Winkel bestimmen sollen, sehr weislich die Seiten eines rechtwinkligen Dreyeckes. Denn in dem bey B rechtwinkligen Dreyecke ABC (Fig. 1.) wird der Winkel A aus den Verhältnissen AC : AB; AB : BC; AC : BC, und hinwieder diese aus jenem bestimmt.

§. 6.

Nennt man daher, mit den Erfindern dieser Wissenschaft, BC : AC oder $\frac{BC}{AC}$ den Sinus des Winkels A; $\frac{AB}{AC}$ den Cosinus desselben, oder den Sinus seines Complementswinkels C; $\frac{BC}{AB}$ die Tangente des Winkels A, und $\frac{AB}{BC}$ die Cotangente dieses Winkels, oder die Tangente des Complementswinkels C, und bezeichnet den Sinus eines Winkels mit sin., den Cosinus mit cos., die Tangente mit tang., und die Cotangente mit cot., so ergeben sich folgende Grundformeln:

sin. A.

$$\sin. A = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos. A = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{tang}. A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin. A}{\cos. A} = \frac{1}{\cot. A}$$

$$\cot. A = \frac{AB}{BC} = \frac{\cos. A}{\sin. A} = \frac{1}{\text{tang}. A}$$

$$\sin. A^2 + \cos. A^2 = \frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$$

§. 7.

Nimmt man die Hypothenuse AC zur Einheit an, so drückt BC den Sinus des Winkels A, und AB den Cosinus desselben aus. Auf gleiche Weise stellt BC die Tangente des Winkels A, oder die Cotangente des Complementswinkels C vor, wenn man AB für die Einheit gelten läßt. In so fern nun nach dieser Voraussetzung die Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten sich durch gerade Linien vorstellig machen lassen, kann man sie alle gemeinschaftlich goniometrische Linien nennen. — Ich sage hier geflissentlich nichts von noch andern Linien dieser Art, weil ich in der Folge keine Gelegenheit habe, auch ihren praktischen Nutzen zu zeigen.

§. 8.

Diese Linien leiden nach Verschiedenheit der Winkel, welche sie bestimmen, gar mannigfaltige Veränderungen, nicht nur in Ansehung ihrer Größe, sondern auch ihrer

 Lage.

Lage. Man muß sich mit selben sehr genau bekannt gemacht haben, wenn man die nachfolgenden Lehren deutlich verstehen, und Irrungen vermeiden will.

§. 9.

Man beschreibe (Fig. 2.) mit dem Halbmesser AE = 1 den Kreis AGBA, und lasse aus dem Punkte E auf den Durchmesser AB das Perpendikel ED fallen, so ist dieses der Sinus, und DC der Cosinus des Winkels ACE, oder des zugehörigen Bogens AE. Man errichte ferner aus C das Perpendikel CG, und fälle auf selbes, gleichfalls aus E, ein zweytes Perpendikel EH, so ist EH = CD der Sinus, und CH der Cosinus des Winkels ECG, welcher den ACE zu einem rechten ergänzet. Endlich ziehe man durch die Endpunkte der auf einander senkrechten Halbmesser AC und GC die Berührungslinien des Kreises, und verlängere den Schenkel CE, bis er diese Berührungslinien in K und I schneidet, so ist AI die Tangente, und GK die Cotangente des Winkels ACE, und letztere zugleich auch die Tangente des Complementswinkels ECG.

§. 10.

Ist nun der Winkel ACE = 0, oder die Linie CE fällt mit CA zusammen, so wird der Sinus und die Tangente = 0, die Cotangente = ∞, und der Cosinus = 1. Mit dem Winkel wächst der Sinus und die Tangente, der Cosinus aber und die Cotangente nehmen ab, bis derselbe ein rechter geworden. Wie er nun dieses ist, wird der Cosinus und die Cotangente = 0, die Tangente = ∞, und der Sinus = 1, welcher dann der ganze Si-

Sinus heißt. Der Winkel fahre fort zu wachsen, und werde immer mehr und mehr stumpf, so nimmt jetzt der Sinus und die Tangente ab, der Cosinus aber und die Cotangente zu, und es ist Fd der Sinus, Cd der Cosinus, Ai die Tangente, und GK die Cotangente des Winkels ACF. Der Sinus hat noch allein dieselbe Lage gegen den Durchmesser AB, welche er hatte, als der Winkel spitzig war; die übrigen Linien alle haben die entgegengesetzte angenommen. Endlich, wenn der Winkel $= 2R$ ist, ist der Sinus und die Tangente wieder $= 0$, die Cotangente $= \infty$, und der Cosinus $= 1$. Setzt man diese Betrachtungen noch weiter fort, bis der Winkel $= 4R$ ist, und nimmt an, daß die goniometrischen Linien in der Lage, welche sie bey dem spitzigen Winkel haben, positiv, in der entgegengesetzten aber negativ seyen, so läßt sich behaupten, was folgende Tabelle zur leichtern Uebersicht kurz darstellet.

§. 11.

Es bedeute α einen spitzigen Winkel, so ist

$$\sin. (2R - \alpha) = + \sin. \alpha$$
$$\cos. (2R - \alpha) = - \cos. \alpha$$
$$\text{tang.} (2R - \alpha) = - \text{tang.} \alpha$$
$$\cot. (2R - \alpha) = - \cot. \alpha$$

$$\sin. (2R + \alpha) = - \sin. \alpha$$
$$\cos. (2R + \alpha) = - \cos. \alpha$$
$$\text{tang.} (2R + \alpha) = + \text{tang.} \alpha$$
$$\cot. (2R + \alpha) = + \cot. \alpha$$

$$\sin.\ (4R - \alpha) = - \sin.\ \alpha$$
$$\cos.\ (4R - \alpha) = + \cos.\ \alpha$$
$$\text{tang.}\ (4R - \alpha) = - \text{tang.}\ \alpha$$
$$\cot.\ (4R - \alpha) = - \cot.\ \alpha$$

Es will dieses sagen: Zwey Winkel, die einander zu zwey oder vier rechten ergänzen, gehören mit gleichen goniometrischen Linien zusammen; nur daß dieselben zum Theil entgegengesetzte Beziehungen auf einander haben. Dieses ist noch wahr, wenn man die mit 4R abgebrochenen Betrachtungen über 4, 8, 12 u. m. R fortsetzt; auch kehrt immer die nämliche Ordnung der Zeichen zurück.

§. 12.

Mann kann sich vorstellen, daß der Winkel ACE, nachdem er bis o abgenommen, in den entgegengesetzten Zustand ACe übergegangen, und negativ geworden sey. Unter dieser Voraussetzung bekommen auch die mit ihm zusammengehörigen goniometrischen Linien, den Cosinus ausgenommen, eine entgegengesetzte Lage, und werden negativ; und zwey Winkel, deren einer positiv, der andere negativ ist, haben, wenn sie sich zu 4R ergänzen, einerley goniometrische Linien, ihrer Größe und Beziehung nach.

Goniometrische Grundformeln.

§. 13.

Lehrsatz. Der Sinus eines Winkels ist der halben Sehne des doppelten Winkels gleich.

Be-

Beweis. Es sey ECA = eCA, so ist auch ED = eD, oder ED = $\frac{1}{2}$ Ee; also, wenn α allgemein den Winkel, und ch. die Sehne bezeichnet, sin. α = $\frac{1}{2}$ ch. 2α.

§. 14.

Aufgabe. Der Sinus und Cosinus (Fig. 3.) zweyer Winkel, ACB = α, und BCK = β, sind gegeben: man soll den Sinus und Cosinus der Summe beyder Winkel finden.

Auflösung. Es sey BD auf AC, und KL auf BC senkrecht, so ist BD = sin. α, CD = cos. α, KL = sin. β, und CL = cos. β. Ferner sey auch KM auf AC senkrecht, so ist ACK = $\alpha + \beta$, KM = sin. $(\alpha+\beta)$, und CM = cos. $(\alpha+\beta)$. Ueberdieß sey LP auf AC, und LO auf KM senkrecht, so ist

sin. $(\alpha + \beta)$ = KM = LP + KO, und
cos. $(\alpha + \beta)$ = CM = CP − LO.

Wegen Aehnlichkeit der Dreyecke BCD und LCP ist

CB : CL = BD : LP, oder
1 : cos. β = sin. α : LP = sin. α cos. β.

Ferner ist, wegen Aehnlichkeit der Dreyecke KLO und CBD,

CB : CD = KL : KO, oder
1 : cos. α = sin. β : KO = sin. β cos. α.

Daher ist sin. $(\alpha+\beta)$ = sin. α cos. β + sin. β cos. α.

Wegen

Wegen der Aehnlichkeit eben dieser Dreyecke ist auch

$CB : CD = CL : CP$, oder

$1 : \cos.\alpha = \cos.\beta : CP = \cos.\alpha \cos.\beta$, und

$CB : BD = KL : OL$, oder

$1 : \sin.\alpha = \sin.\beta : OL = \sin.\alpha \sin.\beta$.

Daher ist auch $\cos.(\alpha+\beta) = \cos.\alpha \cos.\beta - \sin.\alpha \sin.\beta$.

§. 15.

Nimmt man in den eben gefundenan beyden Formeln den Winkel β negativ an, so fließen daraus zwey andere:

$$\sin.(\alpha - \beta) = \sin.\alpha \cos.\beta - \cos.\alpha \sin.\beta.$$
$$\cos.(\alpha - \beta) = \cos.\alpha \cos.\beta + \sin.\alpha \sin.\beta.$$

§. 16.

Aufgabe. Der Sinus und Cosinus eines Winkels α sind gegeben: man soll den Sinus und Cosinus des doppelten Winkels 2α finden.

Auflös. Man setze in den (§. 14.) für den Sinus und Cosinus der Summe zweyer Winkel gefundenen Ausdrücken $\alpha = \beta$, so wird

$$\sin.\ 2\alpha = 2 \sin.\alpha \cos.\alpha, \text{ und}$$
$$\cos.\ 2\alpha = \cos.\alpha^2 - \sin.\alpha^2.$$

§. 17.

Aufgabe. Es ist der Cosinus eines doppelten Winkels 2α gegeben: man soll den Sinus und Cosinns des einfachen finden.

Auf-

Auflösung. Es war (§. 16.) $\cos. 2\alpha = \cos. \alpha^2 - \sin. \alpha^2$. Addirt man diese Gleichung zu $1 = \cos. \alpha^2 + \sin. \alpha^2$, so erhält man

$1 + \cos. 2\alpha = 2 \cos. \alpha^2$, und

$1 - \cos. 2\alpha = 2 \sin. \alpha^2$, wenn man sie von einander subtrahirt. Aus dem erstern Ausdrucke ergiebt sich

$\cos. \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos. 2\alpha}{2}}$, und

$\sin. \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos. 2\alpha}{2}}$ aus dem letztern.

§. 18.

Aufgabe. Aus den gegebenen Tangenten zweyer Winkel α und β die Tangente ihrer Summe und Differenz zu finden.

Auflös. Es ist $\tan g. (\alpha + \beta) = \frac{\sin. (\alpha + \beta)}{\cos. (\alpha + \beta)}$
$= \frac{\sin. \alpha \cos. \beta + \sin. \beta \cos. \alpha}{\cos. \alpha \cos. \beta - \sin. \beta \sin. \alpha}$. Man dividire Zähler und Nenner mit $\cos. \alpha \cos. \beta$, so erhält man

$\text{tang.} (\alpha + \beta) = \frac{\text{tang.} \alpha + \text{tang.} \beta}{1 - \text{tang.} \alpha \text{ tang.} \beta}$, und

wenn man sich den Winkel β als negativ vorstellt, auch

$\text{tang.} (\alpha - \beta) = \frac{\text{tang.} \alpha - \text{tang.} \beta}{1 + \text{tang.} \alpha \text{ tang.} \beta}$.

§. 19.

Diese Formeln dienten den Alten, zum Theil, zur Berechnung der goniometrischen Linien, sind aber auch für uns von mannigfaltigem Gebrauche, und durften darum nicht weggelassen werden. Sie sind außerordentlich fruchtbar, und eine Menge anderer, wenn wir deren zur gegenwärtigen Absicht nöthig hätten, liesse sich ohnschwer daraus ableiten. — Folgende Formel steht nur darum hier, weil sie in den gewöhnlichen Sammlungen nicht vorkömmt, und doch in der Polygonometrie gute Dienste leistet.

§. 20.

Aufgabe. Es sind von der Summe zweyer Winkel α und β, auch von dem Winkel α insbesondere Sinus und Cosinus gegeben: man soll den Cosinus von β finden.

Auflösung. Man multiplicire den Ausdruck für $\sin.\ (\alpha + \beta)$ mit $\sin.\ \alpha$, und den für $\cos.\ (\alpha + \beta)$ mit $\cos.\ \alpha$, so erhält man

$$\sin.\alpha\ \sin.(\alpha+\beta) = \sin.\alpha^2\ \cos.\beta + \sin.\alpha\ \cos.\alpha\ \sin.\beta,$$

und

$$\cos.\alpha\ \cos.(\alpha+\beta) = \cos.\alpha^2\ \cos.\beta - \sin.\alpha\ \cos.\alpha\ \sin.\beta,$$

und wenn man diese beyden Gleichungen addirt,

$$\sin.\ \alpha\ \sin.\ (\alpha + \beta) + \cos.\ \alpha\ \cos.\ (\alpha + \beta)$$
$$= (\sin.\ \alpha^2 + \cos.\ \alpha^2)\ \cos.\ \beta = \cos.\ \beta.$$

Grundlegung zur allgemeinen Berechnung geradliniger Figuren.

§. 21.

Die Winkel einer geradlinigen Figur sind zum Theil hohle, zum Theil erhabene; von jenen sind die Schenkel auswärts, von diesen einwärts gekehrt. Die hohlen Winkel sind jedesmal kleiner, die erhabnen größer, als 2 R.

§. 22.

Daß die Summe aller Winkel (hohlen und erhabenen) einer Figur, so vielmal 2 R gleich ist, als diese Seiten hat, weniger zwey, ist schon aus der Planimetrie bekannt.

§. 23.

Die Ergänzungen der hohlen Winkel zu 2 R, und die Ueberschüsse der erhabenen über 2 R werden Nebenwinkel genannt.

§. 24.

Lehrsatz. Wenn eine Figur (Fig. 4.) lauter hohle Winkel hat, ist die Summe ihrer Nebenwinkel $= 4$ R.

Beweis. Es seyen a, b, c, d u. s. f. die hohlen Winkel, und A, B, C, D u. s. f. derselben Nebenwinkel, so ist

$A + a = 2R$
$B + b = 2R$
$C + c = 2R$
$D + d = 2R$
$E + e = 2R$ u. s. f.

Wenn

Wenn daher S die Summe aller hohlen Winkel, s die aller Nebenwinkel, und n die Zahl der Seiten bezeichnet, ist

$S + s = 2nR.$ Nun ist
$S = (n - 2)\, 2R$; also
$s = 2nR - (n-2)\, 2R = (n - n + 2)\, 2R$
$= 4R.$

§. 25.

Lehrsatz. Wenn eine Figur (Fig. 5.) hohle und erhabene Winkel hat, ist die Differenz ihrer Nebenwinkel $= 4R.$

Beweis. Es seyen a, b, c u. s. f. die Winkel einer Figur, A, B, C u. s. f. die Nebenwinkel derselben, so ist

$$A + a = 2R$$
$$B + b = 2R$$
$$c - C = 2R$$
$$D + d = 2R$$
$$E + e = 2R$$
$$f - F = 2R$$
$$G + g = 2R$$
$$H + h = 2R \text{ u. s. f.}$$

Bezeichnet nun S die Summe aller hohlen und erhabenen Winkel, ſ die Summe der Nebenwinkel von jenen, s die Summe der Nebenwinkel von diesen, so ist
$S + ſ - s = 2nR.$

Es

Es ist aber $S = (n - 2)\,2R$; also

$$f - s = 2nR - (n-2)\,2R = (n - n + 2)\,2R = 4R.$$

§. 26.

Die Nebenwinkel der hohlen Winkel, und die Complemente von den Nebenwinkeln der erhabenen zu 4 R, werden äußere **Winkel** genannt.

§. 27.

In jeder Figur, die lauter hohle Winkel hat, ist daher die Summe der äußern Winkel = 4 R (§. 24.)

§. 28.

Lehrsatz. In jeder Figur, die hohle und erhabene Winkel hat, ist die Summe der äußern Winkel so vielmal 4 R gleich, als dieselbe erhabene Winkel hat, mehr eins.

Beweis. Es sey m die Zahl der erhabenen Winkel, so ist $4mR - s$ die Summe aller äußern Winkel, welche mit den erhabenen zusammen gehören; denn man erhält jeden äußern Winkel eines erhabenen innern, wenn man von 4 R den zugehörigen Nebenwinkel abzieht. Es ist aber f die Summe aller äußern Winkel, welche mit den hohlen innern zusammen gehören; daher ist $f + 4mR - s$ die Summe aller äußern Winkel, sowohl jener, welche mit den erhabenen, als dieser, welche mit den hohlen innern zusammengehörig sind. Nun ist $f - s = 4R$ (§. 25.); also

$$f + 4mR - s = 4R + 4mR = (m+1)\,4R.$$

§. 29.

Lehrsatz. Wenn in einer Figur (Fig. 6.) zwey oder mehrere Seiten einander schneiden, ist nichts desto weniger die Summe der äußern Winkel so vielmal 4 R gleich, als dieselbe erhabene Winkel hat, mehr eins.

Beweis. Es sey ABCDEF eine solche Figur. Man stelle sich dieselbe, aus der $AB\gamma\delta\varepsilon F$ entstanden, vor, so sind die Winkel C und E als erhabene anzusehen, und der mit F zusammengehörige äußere Winkel ist um so viel größer, als 2 R, als AFE beträgt. Setzt man daher $BAF = a$, $ABC = b$, $BCD = c$, $CDE = d$, $DEF = e$, und $EFA = f$, und nimmt an, A, B, C, D, E und F seyen die mit selben zusammengehörigen äußern Winkel, so ist

$$A = 2R - a$$
$$B = 2R - b$$
$$C = 2R + c$$
$$D = 2R - d$$
$$E = 2R + e$$
$$F = 2R + f; \text{ also}$$

$$A+B+C+D+E+F = 3.\,4R+c+e+f-a-b-d$$
$$= (2+1)4R+c+e+f-a-b-d.$$

Nun ist, $A \circ C = D \circ F = \phi$ angenommen, $a + b = c + \phi$, und $e + f = d + \phi$; also

$a + b + d = c + e + f$; folglich

$$A + B + C + D + E + F = (2 + 1)\,4R.$$

Daher ist wieder allgemein $S + 4mR - s = (m+1)\,4R$.

§. 30.

§. 30.

Stellt man sich zwey, einen und denselben Winkel einschließende Seiten einer Figur, als unendlich lang vor, so sind sie als parallel, und der eingeschlossene Winkel als $= 0$, folglich der mit demselben zusammengehörige äußere als $= 2R$ anzusehen, und die Summe der übrigen äußern Winkel ist $= (m + 1) 4R - 2R = (2m + 1) 2R$. Daher, wenn man zwischen zweyen Parallelen eine gebrochene Linie (Fig. 7.) ABCD zieht, ist die Summe aller äußern Winkel so vielmal zweyen rechten gleich, als die gedoppelte Zahl der erhabenen Winkel mehr eins anzeigt.

§. 31.

Wenn man auf was immer für eine Seite einer Figur, die nach Erforderniß auch verlängert werden mag, aus den gegenüberstehenden Eckpunkten Perpendikel fällt, so heißen diese die **Breiten**, und die Stücke, welche sie abschneiden, immer von einem und demselben Punkte an gerechnet, die **Längen der Eckpunkte**, und endlich die Seite der Figur, worauf die Längen gezählt werden, die **Längenlinie**. Sind für eine angenommene Längenlinie die, mit jedem Eckpunkte einer Figur zusammengehörigen Längen und Breiten bekannt, so ist die Natur der geradlinigen Figur bestimmt. Wenn sich daher zwey Gleichungen finden lassen, welche die mit jedem Eckpunkte einer geradlinigen Figur zusammengehörigen Längen und Breiten auf eine allgemeine Weise ausdrücken, so bestimmen diese Gleichungen die Natur jeder geradlinigen Figur.

§. 32.

Aufgabe. Aus den gegebenen erforderlichen Seiten und Winkeln einer geradlinigen Figur die zwey Gleichungen zu finden, welche ihre Natur bestimmen.

Auflösung. Es sey (Fig. 6.) ABCDEF eine sechsseitige Figur von hohlen und erhabenen Winkeln, auch solchen Seiten, deren einige einander schneiden. Man nehme AF zur Längenlinie an, ziehe durch C und E die Linien np und qE mit selber parallel, und fälle aus den gegenüberliegenden Punkten B und D die Perpendikel Bm, Bn, Dp und Dq, und wieder aus E das Perpendikel Er, so entstehen die rechtwinkligen Dreyecke ABm, BCn, DCp, DEq und EFr, welche die Lage der Eckpunkte B, C, D, E und F gegen die Linie AF bestimmen. Denn der Eckpunkt

B hat zur Breite Bm
Länge Am;

C hat zur Breite $Bm - Bn = Ct$
Länge $Am + Cn = At$;

D hat zur Breite $Bm - Bn + Dp = Ds$
Länge $Am + Cn + Cp = As$;

E hat zur Breite $Bm - Bn + Dp - Dq = Er$
Länge $Am + Cn + Cp + Eq = Ar$;

F hat zur Breite $Bm - Bn + Dp - Dq + Er = 0$
Länge $Am + Cn + Cp + Eq + Fr = AF$.

Man

Man setze nun den Winkel BAm $= \alpha$, BCn $= \beta$ DCp $= \gamma$, DEq $= \delta$, und EFr $= \varepsilon$, so ist

$$\alpha = 2R - A;$$

$$\beta = 2R - (\alpha + 2R - B) = A + B - 2R;$$

$$\gamma = 4R - (C + \beta) = 4R - (A + B + C - 2R)$$
$$= 6R - (A + B + C);$$

$$\delta = 2R - (\gamma + 2R - D) = 2R - (6R - (A + B + C)$$
$$+ 2R - D) = A + B + C + D - 6R;$$

$$\varepsilon = 2R - (\delta + E - 2R) = 2R - (A + B + C$$
$$+ D + E - 8R) = 10R - (A + B + C + D + E)$$

und vermöge (§. 15.)

$$\sin.\ \alpha = + \sin.\ A$$
$$\cos.\ \alpha = - \cos.\ A;$$

$$\sin.\ \beta = - \sin.\ (A + B)$$
$$\cos.\ \beta = - \cos.\ (A + B);$$

$$\sin.\ \gamma = + \sin.\ (A + B + C)$$
$$\cos.\ \gamma = - \cos.\ (A + B + C);$$

$$\sin.\ \delta = - \sin.\ (A + B + C + D)$$
$$\cos.\ \delta = - \cos.\ (A + B + C + D);$$

$$\sin.\ \varepsilon = + \sin.\ (A + B + C + D + E)$$
$$\cos.\ \varepsilon = - \cos.\ (A + B + C + D + E).$$

Es ist aber nach (§. 6.) $\sin. \alpha = \frac{Bm}{AB}$, und $\cos. \alpha = \frac{Am}{AB}$; also

$$Bm = AB \sin. \alpha = + a \sin. A, \text{ und}$$
$$Am = AB \cos. \alpha = - a \cos. A.$$

Eben so findet man auch

$$Bn = - b \sin. (A + B)$$
$$Cn = - b \cos. (A + B);$$
$$Dp = + c \sin. (A + B + C)$$
$$Cp = - c \cos. (A + B + C);$$
$$Dq = - d \sin. (A + B + C + D)$$
$$Eq = - d \cos. (A + B + C + D);$$
$$Er = + e \sin. (A + B + C + D + E)$$
$$Fr = - e \cos. (A + B + C + D + E).$$

Daher ist endlich

$$a \sin. A + b \sin. (A+B) + c \sin. (A+B+C) + d \sin. (A+B+C+D) + e \sin. (A+B+C+D+E) = 0, \text{ und}$$

$$a \cos. A + b \cos. (A+B) + c \cos. (A+B+C) + d \cos. (A+B+C+D) + e \cos. (A+B+C+D+E) = - f.$$

Es ist begreiflich, wie diese zwey Gleichungen für jede mehrseitige Figur weiter fortgesetzt, und für jede

weni=

wenigerseitige abgebrochen werden möge. Daher sind sie ganz allgemein.

§. 33.

Diese beyden Gleichungen sind die Grundlage von der sämmentlichen Trigonometrie und Polygonometrie, wie wir in der Folge zeigen werden.

Trigonometrie.

Die vornehmsten trigonometrischen Formeln.

§. 34.

Von den drey Stücken eines Dreyeckes, aus welchen die übrigen drey bestimmt werden sollen, muß wenigst eines eine Seite seyn. Nach dieser Voraussetzung sind alle besondere Fälle, welche vorkommen können, unter den folgenden allgemeinen begriffen:

1) Die drey gegebenen Stücke, und das eine gesuchte, sind zwey Seiten und die beyden gegenüber stehenden Winkel; oder

2) zwey Seiten und zwey Winkel, deren einer von diesen eingeschlossen ist; oder

3) drey Seiten und ein Winkel.

Für diese drey Verbindungen zwischen vier Stücken eines Dreyeckes muß es also auch drey Gleichungen geben, welche wir nun aufsuchen wollen.

§. 35.

Aufgabe. Zwischen zweyen Seiten, und den gegenüber stehenden zweyen Winkeln eines Dreyeckes eine Gleichung zu finden.

Auflösung. Die erste Grundgleichung verwandelt sich für das Dreyeck (Fig. 8.) in diese: $a \sin. A + b \sin. (A + B) = 0$. Nun ist $C = 4R - (A + B)$; also $A + B = 4R - C$, und $\sin. (A + B) = - \sin. C$; folglich $a \sin. A - b \sin. C = 0$, oder $a \sin. A = b \sin. C$.

§. 36.

Man ist gewöhnt in der Trigonometrie sich nur der innern Winkel zu bedienen; auch pflegt man hier, zum Behufe unserer Vorstellungskraft, die Seiten, und die denselben gegenüber stehenden Winkel durch ähnliche Buchstaben auszudrücken. Diesem gemäß bedeuten künftig, doch einsweilen nur für diesen ersten Hauptfall (Fig. 9.) A, B, C die innern Winkel, und a, b, c die denselben gegenüber stehenden Seiten, so ist $c \sin. A = a \sin. C$, oder

$b \sin. C = c \sin. B$, oder

$a \sin. B = b \sin. A$.

§. 37.

Aufgabe. Zwischen zweyen Seiten und zweyen Winkeln, deren einer von diesen Seiten eingeschlossen ist, eine Gleichung zu finden.

Auflösung. Es ist allgemein (Fig. 8.) $a \sin. A + b \sin. (A + B) = 0$; also (§. 15.) $a \sin. A + b (\sin. A \cos. B + \cos. A \sin. B) = 0$; oder $\sin. A (a + b \cos. B) + b \cos. A \sin. B = 0$; folglich $\frac{\sin. A}{\cos. A} = \text{tang.} A = \frac{-b \sin. B}{a + b \cos. B}$.

§. 38.

Bedeuten auch für diesen zweyten Hauptfall (Fig. 9.) A, B, C die innern Winkel, und a, b, c die denselben gegenüber stehenden Seiten, so verwandelt sich die eben gefundene Gleichung in diese:

$$\text{tang} (2R - A) = \frac{-a \sin. B}{c + a \cos. (2R - B)}; \text{ oder}$$

$$\text{tang.} A = \frac{a \sin. B}{c - a \cos. B}.$$

§. 39.

Es erhält diese Formel eine zur Rechnung bequemere Gestalt, wenn man setzt

$$\cot. A = \frac{c - a \cos. B}{a \sin. B} = \frac{c}{a \sin. B} - \frac{a \cos. B}{a \sin. B}$$

$$= \frac{c}{a \sin. B} - \cot. B.$$

§. 40.

§. 40.

Aufgabe. Zwischen drey Seiten und einem Winkel eine Gleichung zu finden.

Auflösung. Es ist (Fig. 8.) wieder a sin. A + b sin. (A + B) = o; aber auch a cos. A + b cos. (A + B) = – c. In diesen letztern Ausdruck verwandelt sich für das Dreyeck die zweyte allgemeine Grundgleichung. Man quadrire diese beyden Gleichungen, und addire die Quadrate, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} a^2 \sin. A^2 + 2ab \sin. A \sin. (A+B) \\ \quad + b^2 \sin. (A+B)^2 \\ a^2 \cos. A^2 + 2ab \cos. A \cos. (A+B) \\ \quad + b^2 \cos. (A+B)^2 \end{array}\right\} = c^2 \text{; oder}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 + 2ab\,(\sin. A \sin. (A+B) \\ \quad + \cos. A \cos. (A+B)) \end{array}\right\} = c^2$$

und daher (§. 20.)

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos. B.}$$

§. 41.

Bedeuten endlich auch für diesen dritten Hauptfall (Fig. 9.) A, B, C die innern Winkel, und a, b, c die denselben gegenüber stehenden Seiten, so ergiebt sich

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos. B.}$$

§. 42.

Auch diese Formel läßt sich bequemer zur Rechnung darstellen. Denn da

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos. B = ac\left(\frac{a^2 + c^2 - 2ac\cos. B}{ac}\right)$$

so wird

$$b = \sqrt{ac\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} - 2\cos. B\right)}.$$

§. 43.

Vermittelst dieser drey Gleichungen lassen sich nun alle, auf Berechnung recht- und schiefwinkeliger Dreyecke abzweckenden trigonometrischen Aufgaben ohne besondere Beschwerniß auflösen.

§. 44.

Der erste Hauptfall (§. 34.) begreift folgende zwey Nebenfälle unter sich:

1) Zwey Winkel, und eine Seite sind gegeben, und die andere Seite wird gesucht;

2) Zwey Seiten, und ein Winkel sind gegeben, und der andere Winkel wird gesucht.

§. 45.

Aufgabe. Es sind zwey Winkel, und eine Seite gegeben: man soll die andere Seite finden.

Auf-

Auflösung. Es seyen A und C die gegebenen Winkel, a die gegebene, und c die zu suchende Seite, so ist

$$c \sin. A = a \sin. C; \text{ also}$$

$$c = \frac{a \sin. C}{\sin. A}.$$

Z. B. Es sey $A = 40°$; $C = 35° 27'$; $a = 5247$, und c soll gesucht werden. Die Rechnung ist diese:

$$\log. \sin. C = 9{,}7634222$$
$$\log. a = 3{,}7199111$$
$$13{,}4833333$$
$$\log. \sin. A = 9{,}8080675$$
$$3{,}6752658 = \log. 4735; \text{ also}$$
$$b = 4735.$$

§. 46.

Wäre aber die zu suchende Seite nicht c, welche dem Winkel C, sondern b, welche dem nicht gegebenen Winkel B gegenüber steht, so dürfte man nur aus den gegebenen beyden Winkeln A und C, den nicht gegebenen B suchen, um dann auch die ihm gegenüber stehende Seite b finden zu können.

§. 47.

Unter der Voraussetzung, daß das Dreyeck rechtwinkelig sey, nimmt die Gleichung für den ersten Hauptfall

fall (§. 34.) eine etwas verschiedene, auch mehrfache Gestalt an, je, nachdem dieses oder jenes Paar entgegengesetzter Seiten und Winkel miteinander verglichen werden sollen. Da überhaupt nur drey solche Vergleichungen möglich sind, haben auch nur drey, nicht mehrere verschiedene Formen dieser Gleichung, wie überhaupt, so auch in Ansehung der rechtwinkeligen Dreyecke insbesondere Statt. Denn es seyen A der rechte, B und C die spitzigen Winkel, und a die Hypothenuse, b und c die Catheten eines rechtwinkeligen Dreyeckes, so ist

$$c = a \text{ sin. } C = a \text{ cos. } B$$

$$b = c \text{ tang. } B = c \text{ cot. } C$$

$$a \text{ sin. } B = a \text{ cos. } C = b.$$

Nach diesen Formeln lassen sich die rechtwinkeligen Dreyecke, unter den schon angezeigten Voraussetzungen, ohnschwer berechnen.

§. 48.

Aufgabe. Es sind zwey Seiten, und einer der gegenüber stehenden Winkel gegeben: man soll den andern finden.

Auflösung. Es seyen a und c die gegebenen Seiten, A der gegebene, und C der zu suchende Winkel, so ist

$$a \text{ sin. } C = c \text{ sin. } A; \text{ also}$$

$$\text{sin. } C = \frac{c \text{ sin. } A}{a}.$$

Z. B. Es sey a = 5247; c = 4734; A = 40°, und C soll gesuchet werden.

$$\begin{aligned}\log.\ \sin.\ A &= 9{,}8080675\\ \log.\ c &= 3{,}6752283\\ \hline & 13{,}4832958\\ \log.\ a &= 3{,}7199327\\ \hline & 9{,}7633631 = \log.\ \sin.\ 35^\circ\ 27';\end{aligned}$$

also $C = 35^\circ\ 27'$.

§. 49.

Sollte nicht der Winkel C, welcher der gegebenen Seite c gegenüber steht, sondern B gesuchet werden, so müßte man nichts desto weniger zuerst C, und dann aus dem gefundenen C, und gegebenen A, auch B gesuchet werden.

§. 50.

Wenn das Dreyeck rechtwinkelig ist, können die demselben (§. 47.) besonders geeigneten Formeln auch hier angewandt werden.

§. 51.

Der zweyte Hauptfall begreift keinen Nebenfall in sich, der nicht schon in dem ersten enthalten ist. Daher bleibt uns hier eine einzige Aufgabe aufzulösen übrig.

§. 52.

Aufgabe. Es sind zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gegeben: man soll einen der beyden übrigen finden.

Auflösung. Es seyen a und c die gegebenen Seiten, B der gegebene Winkel, und A der, welcher gesuchet werden soll, so ist

$$\cot. A = \frac{c}{a \sin. B} - \cot. B.$$

Z. E. Es sey a = 5247; c = 4734; B = 104° 33', und A soll gesuchet werden.

$$\begin{array}{rl} \log. \sin. B = & 9{,}9858434 \\ \log. a = & \underline{3{,}7199327} \\ & 13{,}7057761 - 10 \\ \log. c = & \underline{3{,}6752283} + 4 - 4 \\ & 3{,}9694522 - 4 = \log. 0{,}9321; \end{array}$$

$$\text{also } \frac{c}{a \sin. B} = 0{,}9321$$

$$\cot. B = \underline{0{,}2595488}$$

$$1{,}1916488 = \cot. 40°; \text{ also}$$

$$A = 40°.$$

§. 53.

Anfänger begreifen oft leichter ziemlich schwere Beweise, als sie, wegen gewisser Beschwernisse, ein Zahlen-

bey-

beyspiel bearbeiten. Diese nur scheinbaren Beschwernisse ein = für allemal zu zerstreuen, mögen folgende drey Anmerkungen dienen.

1) Daß cot. B, wenn B stumpf ist, addirt werden muß, erhellet schon aus den ersten Grundbegriffen sowohl von entgegengesetzten Größen, als den goniometrischen Linien (§. 11.), und bedarf keines fernern Beweises.

2) Ist der negative Theil größer, als der positive, und fällt daher tang. A negativ aus, so zeigt dieß an, daß A stumpf ist. In diesem Falle suchet man den Winkel, der mit der negativen Cotangente, als positiv betrachtet, zusammen gehört, und addirt 90° dazu; so wie man, wenn sie positiv ist, sie als Tangente betrachtet, und den mit selber zusammengehörigen Winkel von 90° subtrahirt.

3) Wenn man mit Tangenten selbst rechnet, muß man in den Tafeln 7 Ziffer von der Rechten zur Linken abschneiden, weil in denselben r = 10000000 angenommen wird. Die Ziffer, oder die Ziffern, welche dann gegen die Linke überbleiben, sind als Ganze zu betrachten. Auch umgekehrt, wenn man eine Tangente hat, die aus einer ganzen Zahl, und noch einigen Decimalziffern besteht, muß man in den Tafeln eine Tangente suchen, welche diese ganze Zahl mit noch 7 Decimalziffern, die den gegebenen am nächsten kommen, enthalte.

§. 54.

§. 54.

Setzt man, das Dreyeck sey rechtwinkelig, und $B = R$, so ist $\sin. B = 1$, und

$\cot. B = 0$; also

$\cot. A = \frac{c}{a}$ (§. 6.).

§. 55.

Der dritte Hauptfall begreift drey Nebenfälle in sich:

1) Zwey Seiten mit dem zwischenliegenden Winkel sind gegeben, und die dritte Seite wird gesucht.

2) Drey Seiten sind gegeben, und ein Winkel wird gesucht.

3) Ein Winkel, und zwey denselben nicht einschliessende Seiten sind gegeben, und die dritte wird gesucht.

§. 56.

Aufgabe. Es sind zwey Seiten mit dem zwischenliegenden Winkel gegeben: man soll die dritte Seite finden.

Auflösung. Es seyen a und c die gegebenen Seiten, B der gegebene Winkel, und b die Seite, welche gesuchet werden soll, so ist

$$b = \sqrt{ac\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} - 2 \cos. B\right)}.$$

Z. B. Es sey a = 5247; c = 4734; B = 104° 33′, und b soll gesuchet werden.

log. a = 3,7199327

log. c = 3,6752283

log. $\frac{a}{c}$ = 0,0447044 = log. 1,1083

log. $\frac{c}{a}$ = 9,9552956 − 10 = log. 0,9022

2 cos. B = 0,5024

0,4001752 = log. 2,5129

3,7199327 = log. a

3,6752283 = log. c

7,7953362 = log. b^2

3,8976682 = log. b = log. 7901;

also b = 7901.

§. 57.

Ist das Dreyeck rechtwinkelig, und B = R, so erhält man für diesen Fall

$$b = \sqrt{a^2 + c^2}.$$

Wenn aber unter eben der Voraussetzung, daß das Dreyeck rechtwinkelig sey, der Winkel B spitzig ist, dann

mag

mag diese Aufgabe leichter vermittelst der ersten allgemeinen Gleichung (§. 35.) aufgelöset werden.

§. 58.

Aufgabe. Es sind alle drey Seiten gegeben: man soll einen der drey übrigen Winkel finden.

Auflösung. Es seyen a, b, c die gegebenen Seiten, und B der Winkel, welcher gesuchet werden soll, so ist (§. 41.)

$$\text{cos. } B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(a+b)(a-b)}{2ac} + \frac{c}{2a}.$$

Z. B. Es sey a = 5247; b = 7901; c = 4734, und B soll gesuchet werden.

$$a = 5247$$
$$b = 7901$$
$$a + b = 13148$$
$$a - b = -2654$$

log. (a + b) = 4,1188597 | log. 2 = 0,3010300
log. (a − b) = 3,4239009 | log. a = 3,7199327
7,5427606 | log. c = 3,6752283
7,6961910 | 7,6961910

0,8465696 − 1 = log. 0,7024;

$$\text{also } \frac{(a+b)(a-b)}{2ac} = -0{,}7024.$$

log.

$$\log. c = 3{,}6752283$$
$$\log. 2a = 4{,}0209627$$
$$0{,}6542656 - 1 = \log. 0{,}4511;\ \text{also}$$
$$\frac{c}{2a} = 0{,}4511;\ \text{folglich}$$
$$\cos. B = 0{,}4511 - 0{,}7024 = -0{,}2513$$
$$= \cos.\ 75^\circ\ 27',\ \text{und daher}$$
$$B = 2R - 75^\circ\ 27' = 104^\circ\ 33'.$$

§. 59.

Die hier gebrauchte Gleichung ist verschiedener, zur Rechnung bequemerer Gestalten fähig. Denn es ist

$$1 + \cos. B = 1 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2ac}$$

und

$$1 - \cos. B = 1 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(b+a-c)(b-a+c)}{2ac}$$

Nun ist nach (§. 17.)

$$\cos. \tfrac{1}{2}B^2 = \frac{1 + \cos. B}{2},\ \text{und}\ \sin. \tfrac{1}{2}B^2 = \frac{1 - \cos. B}{2};$$

also

$$\cos. \tfrac{1}{2}B^2 = \frac{(a+b+c)(a-b+c)}{4ac},\ \text{und}$$

$$\sin. \tfrac{1}{2}B^2 = \frac{(a+b-c)(-a+b+c)}{4ac};\ \text{folglich auch}$$

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2}B^2 = \frac{(a+b-c)(-a+b+c)}{(a+b+c)(a-b+c)}.$$

Weil

Weil auch $(1 + \cos. B)(1 - \cos. B) = \sin. B^2$, so ist

$$\sin. B^2 = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4a^2c^2}.$$

Man mag aber was immer für einer Formel sich bedienen, müssen doch allemal die Seiten mit aller nur möglichen Genauigkeit gemessen seyn worden, wenn die daraus erhaltenen Winkel richtig seyn sollen.

§. 60.

Aufgabe. Es sind ein Winkel, und zwey denselben nicht einschließende Seiten gegeben: man soll die dritte finden.

Auflösung. Es seyen B der gegebene Winkel, b und c die gegebenen Seiten, und a die Seite, welche gesucht werden soll. Da allgemein

$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos. B}$, so folgt daraus

$$a = c \cos. B + \sqrt{b^2 - c^2 + c^2 \cos. B^2}$$

$$= c \cos. B + \sqrt{b^2 - c^2 \sin. B^2}$$

$$= c \cos. B + \sqrt{(b + c \sin. B)(b - c \sin. B)}$$

Z. B. Es sey $B = 104° 33'$; $b = 7901$; $c = 4734$, und a soll gesucht werden.

log. sin. B =	9,9858434	log. cos. B =	9,4000625
log. c =	3,6752283	log. c =	3,6752283
	13,6610717 − 10; also		13,0752908
			+ 10

$$c \sin. B = 4582{,}175 \quad c \cos. B = 1189{,}298$$
$$b = 7901$$

$$b + c \sin. B = 12483{,}175$$
$$b - c \sin. B = 3318{,}825$$

$$\log. (b + c \sin. B) = 4{,}0963250$$
$$\log. (b - c \sin. B) = 3{,}5209844$$

$$7{,}6173094 \quad : 2$$
$$3{,}8086547; \text{ also}$$

$$\sqrt{(b + c \sin. B)(b - c \sin. B)} = 6436{,}573$$
$$c \cos. B = 1189{,}298$$

$$a = 5247{,}2$$

§. 61.

Leichter läßt sich diese Aufgabe vermittelst der ersten Gleichung (§. 36.) auflösen, indem man vorher einen zweyten Winkel, und dann erst die dritte Seite suchet.

Anwendung auf die Messung unzugänglicher Weiten und Höhen.

§. 62.

Ich übergehe hier jene leichtern Aufgaben, deren Auflösung nur unmittelbare Anwendung der bisher gefundenen Formeln ist; jene allein, welche in einigen davon abgeleiteten Gleichungen den Grund ihrer Auflösung ha-

haben, werde ich hier so kurz und deutlich, als möglich ist, vorzutragen bemühet seyn.

§. 63.

Aufgabe. Die Entfernung zweyer unzugänglichen Oerter aus zweyen angenommenen Standpunkten zu messen.

Auflösung. Es seyen A und D (Fig. 10.) die unzugänglichen Oerter, B und C die angenommenen Standpunkte. Man messe aus dem Stande B die Winkel ABD $= \alpha$, und DBC $= \beta$, aus dem Stande C aber die Winkel DCA $= \delta$, und ACB $= \gamma$, und am Ende noch die Standlinie BC selbst. Der Kürze wegen setze man $\alpha + \beta + \gamma = \phi$; $\beta + \gamma + \delta = \psi$, und $\alpha + \beta = \lambda$, so ist

$$\text{ſin.}\,\phi : \text{ſin.}\,\lambda = BC : AC = \frac{BC\ \text{ſin.}\,\lambda}{\text{ſin.}\,\phi},\ \text{und}$$

$$\text{ſin.}\,\psi : \text{ſin.}\,\beta = BC : CD = \frac{BC\ \text{ſin.}\,\beta}{\text{ſin.}\,\psi};\ \text{alſo (§. 41.)}$$

$$AD = BC \sqrt{\frac{\text{ſin.}\,\lambda^2}{\text{ſin.}\,\phi^2} + \frac{\text{ſin.}\,\beta^2}{\text{ſin.}\,\psi^2} - \frac{2\ \text{ſin.}\,\lambda\ \text{ſin.}\,\beta\ \text{coſ.}\,\delta}{\text{ſin.}\,\phi\ \text{ſin.}\,\psi}}$$

Z. B. Es sey BC $= 2100$; $\alpha = 84° 30'$; $\beta = 51°$; $\gamma = 19° 20'$; $\delta = 71°$, so ist $\phi = 154° 50'$; $\psi = 141° 20'$, und $\lambda = 135° 30$; also ſin. ϕ $=$ ſin. $25° 10'$; ſin. ψ $=$ ſin. $38° 40'$, und ſin. λ $=$ ſin. $44° 30'$.

$$\log.\ \text{ſin.}\ \lambda = 9{,}8456618$$
$$\log.\ \text{ſin.}\ \phi = 9{,}6286472$$
$$0{,}2170146$$
$$\times 2$$
$$\log. \frac{\text{ſin.}\ \lambda^2}{\text{ſin.}\ \phi^2} = 0{,}4340292$$
$$\frac{\text{ſin.}\ \lambda^2}{\text{ſin.}\ \phi^2} = 2{,}718$$
$$\log.\ \text{ſin.}\ \beta = 9{,}8905026$$
$$\log.\ \text{ſin.}\ \psi = 9{,}7957330$$
$$0{,}0947696$$
$$\times 2$$
$$\log. \frac{\text{ſin.}\ \beta^2}{\text{ſin.}\ \psi^2} = 0{,}1895392$$
$$\frac{\text{ſin.}\ \beta^2}{\text{ſin.}\ \psi^2} = 1{,}547$$

$$\log.\ \text{ſin.}\ \lambda = 9{,}8456618$$
$$\log.\ \text{ſin.}\ \beta = 9{,}8905026$$
$$\log.\ \text{coſ.}\ \delta = 9{,}5126419$$
$$\log.\ 2 = 0{,}3010300$$
$$29{,}5498363$$
$$-10$$
$$\log.\ \text{ſin.}\ \phi = 9{,}6286472$$
$$\log.\ \text{ſin.}\ \psi = 9{,}7957330$$
$$19{,}4243802$$
$$\log.\ 1{,}339 = 0{,}1254561$$
$$1{,}335 = \frac{2\,\text{ſin.}\lambda\,\text{ſin.}\beta\,\text{coſ.}\delta}{\text{ſin.}\ \phi\ \text{ſin.}\ \psi}$$

$$\frac{\text{ſin.}\ \lambda^2}{\text{ſin.}\ \phi^2} + \frac{\text{ſin.}\ \beta^2}{\text{ſin.}\ \psi^2} = 4{,}265$$
$$-\ 1{,}335$$
$$2{,}93$$
$$\sqrt{2{,}93} = 1{,}7117$$
$$BC = 2100$$
$$AD = 3594{,}57.$$

§. 64.

§. 64.

Aus Betrachtung der gefundenen Gleichung erhellet, daß man mit Hilfe derselben eben so gut auch die Weite BC finden könnte, wenn diese unbekannt, die andere AD aber schon mittelbar oder unmittelbar gemessen worden wäre. Daher dienet eine und dieselbe Gleichung sowohl eine unzugängliche Weite aus der Standlinie, als diese aus jener zu bestimmen. Beyde Fälle kommen bey Landesvermessungen öfters vor.

§. 65.

Aufgabe. Es ist die Lage dreyer Oerter A, B, C (Fig 10.) gegeben: die Entfernung eines vierten Ortes D von jedem derselben zu finden.

Auflösung. Man messe aus D die Winkel BDC und BDA, so ergeben sich zwey Dreyecke BCD und ABD, von welchen, wenn nur der Winkel BCD oder BAD bekannt wäre, die Seiten CD, BD, AD ohnschwer gefunden werden könnten. Daher kömmt hier alles darauf an, daß z. B. der Winkel BCD gefunden werde. Es sey demnach der gegebene Winkel ABC $= \varepsilon$, der eine gemessene BDC $= \gamma$, der andere BDA $= \delta$, und der zu suchende BCD $= \omega$, so ist BAD $= 4R - (\gamma + \delta + \varepsilon + \omega) = \phi - \omega$, wenn $4R - (\gamma + \delta + \varepsilon) = \phi$ gesetzt wird, und man erhält für die Dreyecke BCD und ABD folgende zwey Gleichungen (§. 36.)

$$BD \sin. \gamma = BC \sin. \omega, \text{ und}$$

$$BD \sin. \delta = AB \sin. (\phi - \omega); \text{ also}$$

BC

$$\frac{BC \sin. \omega}{\sin. \gamma} = \frac{AB \sin. (\phi - \omega)}{\sin. \delta}, \text{ oder}$$

$$\frac{BC \sin. \delta}{AB \sin. \gamma} = \frac{\sin. (\phi - \omega)}{\sin. \omega} = \sin. \phi \cot. \omega - \cos. \phi$$

(§. 15.); folglich

$$\cot. \omega = \frac{BC \sin. \delta}{AB \sin. \gamma \sin. \phi} + \cot. \phi.$$

Z. B. Es sey BC = 87; AB = 80,5; ABC = ε = 167° 30′; ferner BDC = γ = 30° 45′; BDA = δ = 23° 15′; ϕ = 138° 30′, und BCD = ω soll gesuchet werden.

$$\begin{array}{rr}
\log. \sin. \delta = 9,5963154 & \log. \sin. \gamma = 9,7086699 \\
\log. BC = 1,9395193 & \log. AB = 1,9057959 \\
\hline
11,5358347-10 & \log. \sin. \phi = 9,8212646 \\
\hline
21,4357304-20 & 21,4357304 \\
\hline
 & -20 \\
0,1001043 = \log. 1,259 & \\
\cot. \phi = -1,13029 & \\
\hline
\cot. 82^\circ 39' = 0,12871; \text{ also} & \\
\omega = 82^\circ 40'. &
\end{array}$$

Ist nun der Winkel BCD gefunden, so ergiebt sich auch der Winkel BAD: und dann lassen sich die Entfernungen CD, BD, AD auf gewöhnliche Weise berechnen.

§. 66.

§. 66.

Diese Auflösung ist ganz allgemein, und wo immer der Ort D gelegen seyn mag, gleich anwendbar; selbst den besondern Fall, wo A, B, C in gerader Linie liegen, nicht ausgenommen. Im Falle aber, wo D entweder auf der Seite AC selbst, zwischen A und C, oder auf der verlängerten AC, über C hinaus, zu liegen kömmt, fällt die vorläufige Bestimmung des Winkels BCD, der nun dem schon bekannten BCA gleich ist, ganz weg, und man kann gleich unmittelbar aus den in D gemessenen zweyen, oder einem Winkel, die Entfernungen des Ortes D durch eine leichte Rechnung finden. — Auch diese Aufgabe ist dem Landmesser sehr zu empfehlen; zumal als sie auch viel Richtigkeit gewähret, wenn nur die vier Oerter jedesmal schicklich für einander gewählet worden.

§. 67.

Aufgabe. Es seyen (Fig. 11.) A'B zweyer Oerter A, B horizontale Entfernung, und AA' des erstern A Höhe über dem Horizonte bekannt: man soll eines dritten Ortes E Höhe ED über A, oder Höhe EC über A' finden.

Auflösung. Man messe aus E die beyden vertikalen Winkel AED $= \alpha$, BEC $= \beta$, und auch den Winkel A'CB $= \gamma$, unter welchem die durch EA und EB gelegten vertikalen Ebenen sich schneiden. Da die Dreyecke EDA, ECB bey D und C rechtwinkelig sind, so ist

$AD = A'C = ED \text{ tang. } \alpha$, und

$BC = (AA' + ED) \text{ tang. } \beta$. Daher ist

$$A'B^2 = ED^2 \text{ tang. } \alpha^2 + (AA' + ED)^2 \text{ tang. } \beta^2$$
$$- 2 (AA' \times ED + ED^2) \text{ tang. } \alpha \text{ tang. } \beta \text{ cos. } \gamma$$
$$= ED^2 (\text{tang. } \alpha^2 + \text{tang. } \beta^2 - 2 \text{ tang. } \alpha \text{ tang. } \beta \text{ cos. } \gamma)$$
$$+ ED (2 AA' \text{ tang. } \beta^2 - 2 AA' \text{ tang. } \alpha \text{ tang. } \beta \text{ cos. } \gamma)$$
$$+ A'A^2 \text{ tang. } \beta^2.$$

Man setze die mit ED^2 multiplicirte Größe $= P$, die mit ED multiplicirte $= Q$, und $A'A^2 \text{ tang. } \beta^2 = R$, so wird

$$A'B^2 = ED^2 \times P + ED \times Q + R, \text{ und}$$

$$ED = \frac{1}{2P}\left(\pm \sqrt{Q^2 + 4P(A'B^2 - R)} - 2Q\right)$$

§. 68.

Daß die Auflösung dieser Aufgabe in Zahlen mühesam ist, brauche ich nicht erst zu erinnern; allein im Falle, wo $AA' = 0$, folglich $Q = 0 = R$ ist, wird sie wieder um das leichter. Man erhält dann

$$EC = A'B \sqrt{\frac{1}{P}} = A'B \sqrt{\frac{\text{cot. } \alpha \text{ cot. } \beta}{\frac{\text{cot. } \beta}{\text{cot. } \alpha} + \frac{\text{cot. } \alpha}{\text{cot. } \beta} - 2 \text{cos. } \gamma}}$$

Z. B. Es sey A′B = 3015; α = 85° 58′ 6″; β = 86° 6′ 55″; γ = 49° 34′, und EC soll gesuchet werden.

$$\log.\cot.\alpha = 8,8480796$$

$$\log.\cot.\beta = 8,8319035$$

$$\log.\frac{\cot.\alpha}{\cot.\beta} = 0,0161761 \quad = \log. 1,03795$$

$$\log.\frac{\cot.\beta}{\cot.\alpha} = 0,9838239 - 1 = \log. 0,96343$$

$$2,00138$$

$$2\cos.\gamma = 1,2971256$$

$$0,70425$$

$$\log.\cot.\alpha\cot.\beta = 1,6799821 - 4$$

$$-\ 0,70425$$

$$1,8322553 - 4 \quad : 2$$

$$0,9161276 - 2$$

$$\log. A'B = 3,4792873$$

$$\log. EC = 2,3954149;\ \text{also}$$

$$EC = 248,55.$$

§. 69.

§. 69.

Fallen noch über dieß die zwey vertikalen Winkel α, β in eine und dieselbe vertikale Ebene, oder ist $\gamma = 0$, so wird

$$P = \text{tang.}\,\alpha^2 + \text{tang.}\,\beta^2 - 2\,\text{tang.}\,\alpha\ \text{tang.}\,\beta,$$

und

$$\sqrt{P} = \text{tang.}\,\beta - \text{tang.}\,\alpha;\ \text{folglich}$$

$$EC = A'B\,\sqrt{\frac{1}{P}} = \frac{A'B}{\text{tang.}\,\beta - \text{tang.}\,\alpha}$$

Allein im gegenwärtigen Falle sollen die Winkel nicht mehr aus E, sondern aus A und B gemessen werden. Man setze daher, zum Unterschiede, den aus A gemessenen Winkel EAC $= a$, und den aus B gemessenen EBC $= b$, so wird tang. α = cot. a, und tang. β = cot. b; also

$$EC = \frac{A'B}{\text{cot.}\,b - \text{cot.}\,a}.$$

§. 70.

Fällt endlich der Punkt A mit C zusammen, und wird $a = R$, folglich cot. $a = 0$, so erhält man

$$EC = \frac{A'B}{\text{cot.}\,b} = A'B\ \text{tang.}\,b.$$

§. 71.

Man darf sicher behaupten, daß die (§. 67.) gefundene Gleichung fast alle bey Höhenmessungen vorkommende Fälle enthält. Ich habe deren drey aus selber ab-

abgeleitet; der wißbegierige junge Leser mag mit Ableitung noch eines oder des andern Falles nun selbst seine Kräfte prüfen.

§. 72.

Es ist aber die gefundene Höhe eines Ortes, z. B. einer Bergspitze noch nicht das, was der Landmesser eigentlich suchet. Diese sucht er nur darum vorläufig, um dann auch die horizontale Entfernung desselben Ortes von einem gegebenen bestimmen zu können. Und zu dieser Absicht dienen ihm die (§. 67.) gefundenen Formeln

$A'C = ED \tan\alpha$, und

$BC = (AA' + ED) \tan\beta$.

Anwendung auf die Berechnung des Inhaltes geradliniger Figuren.

§. 73.

Aufgabe. Es sind (Fig. 12.) in dem Dreyecke ABC die Seite BC, und die derselben anliegenden Winkel B und C gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Man fälle aus B das Perpendikel BD $= p$, so ist des Dreyeckes Inhalt $S = \frac{1}{2} b p$. Es ist aber

$$p = a \sin C, \text{ und } b = \frac{a \sin B}{\sin(B + C)}; \text{ also}$$

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin(B + C)} = \frac{a^2}{2(\cot B + \cot C)}.$$

Z. B.

z. B. Es sey a = 246,6; B = 94° 43′; C = 44° 50′.

$$\cot. C = 1{,}00583$$
$$-\cot. B = 0{,}08250$$
$$0{,}92333 \times 2$$
$$\log. 1{,}84666 = 0{,}2663869$$
$$2 \log. a = 4{,}7839862$$
$$4{,}5175993$$
$$= \log. 32930{,}5;$$
$$S = 32930{,}5.$$

§. 74.

Setzt man A = R, so ist auch B + C = R, und sin. (B + C) = 1; also

$$S = \frac{a^2 \text{ sin. B sin. C}}{2} = \frac{a^2 \text{ sin. B cos. B}}{2}$$

$= \frac{a^2 \text{ sin. } 2B}{4}$. Eben so, wenn B = R, wird

$S = \frac{a^2 \text{ tang. C}}{2}$, und wenn C = R,

$$S = \frac{a^2 \text{ tang. B}}{2}.$$

§. 75.

Aufgabe. Es sind die Winkel A, C, und die Seite BC gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Es war (§. 73.) $S = \frac{1}{2} bp$. Nun ist wieder $p = a \sin. C$, und

$$b = \frac{a \sin. (A + C)}{\sin. A}; \text{ also}$$

$$S = \frac{a^2 \sin. C \sin. (A + C)}{2 \sin. A}.$$

Z. B. Es sey $a = 246,6$; $A = 40^\circ 27$; $C = 44^\circ 50'$.

$$\begin{array}{rl} \log. \sin. A = & 9,8121003 \\ \log. 2 = & 0,3010300 \\ \hline & 10,1131303 \\ & -10 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 2 \log. a = & 4,7839862 \\ \log. \sin. C = & 9,8482180 \\ \log. \sin. (A + C) = & 9,9985268 \\ \hline & 24,6307310 - 20 \\ & 10,1131303 - 10 \\ \hline & 4,5176007 = \log. 32930,6 \end{array}$$

$S = 32930,6$

§. 76.

Aufgabe. Es sind die Seiten AB, BC, und der eingeschlossene Winkel B gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Man fälle aus C auf BA das Perpendikel CE = p, so ist $S = \frac{1}{2} cp$. Nun ist $p = a \sin. B$; also

$$S = \frac{ac \sin. B}{2}.$$

Z. B. Es sey $a = 246,6$; $c = 268$; $B = 94° 43'$.

$$\begin{aligned} \log. a &= 2,3919931 \\ \log. c &= 2,4281348 \\ \log. \sin. B &= 9,9985268 \\ \hline & \quad 14,8186547 - 10 \\ \log. 2 &= 0,3010300 \\ \hline & \quad 4,5176247 = \log. 32932,4; \\ S &= 32932,4. \end{aligned}$$

§. 77.

Für $B = R$ wird $S = \frac{ac}{2}$. In den beyden andern Fällen bleibt die Gestalt der Formel ungeändert.

§. 78.

Aufgabe. Es sind die Seiten AB, BC, und der von selben nicht eingeschlossene Winkel A gegeben: den Inhalt zu finden.

Auf-

Auflösung. Es war (§. 76.) $S = \frac{1}{2} cp$. Nun ist $p = b \sin. A$, und

$b = c \cos. A \pm \sqrt{a^2 - c^2 \sin. A^2}$ (§. 60.); also

$S = \frac{1}{2} c^2 \cos. A \sin. A \pm \frac{1}{2} c \sin. A \sqrt{a^2 - c^2 \sin. A^2}$

$= \frac{1}{4} c^2 \sin. 2A \pm \frac{1}{2} c \sin. A \sqrt{(a + c \sin. A)(a - c \sin. A)}$.

Z. B. Es sey $a = 246,6$; $c = 268$; $A = 40^\circ 27'$.

$\log. \sin. A = 9,8121003$
$\log. c = 2,4281348$

$12,2402351 - 10 = \log. 173,874$

$a = 246,6$ — $\log.(a + c \sin. A) = 2,6237391$
$c \sin. A = 173,874$ — $\log.(a - c \sin. A) = 1,8616897$

$a + c \sin. A = 420,474$ — $4,4854288$
$: 2$
$a - c \sin. A = 72,726$ — $2,2427144$
$2,2402351$

$2 \log. c = 4,8562696$ — $4,4829495$
$\log. \sin. 2A = 9,9944992$ — $-0,3010300$

$14,8507688$ — $\log. 15202,6 = 4,1819195$
$\log. 4 = 0,6020600$

$4,2487088 = \log. 17730$

$S = 32932,6$.

§. 79.

§. 79.

Für A = R wird $S = \frac{1}{2} c \sqrt{(a+c)(a-c)}$.

§. 80.

Aufgabe. Es sind die Seiten AB, AC, BC gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Es war (§. 76.) $S = \frac{1}{2} ac \sin. B$. Nun ist (§. 59.)

$$\sin. B = \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4a^2c^2}}$$

also

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{S(S-2a)(S-2b)(S-2c)},$$ wenn

$S = a + b + c$ gesetzt wird.

Z. B. Es sey $a = 246,6$; $b = 378,8$; $c = 268$.

$a = 246,6$	$2a = 493,2$
$b = 378,8$	$2b = 757,6$
$c = 268$	$2c = 536,0$
$S = 893,4$	$\log. S = 2,9510459$
$S-2a = 400,2$	$\log.(S-2a) = 2,6022771$
$S-2b = 135,8$	$\log.(S-2b) = 2,1328998$
$S-2c = 357,4$	$\log.(S-2c) = 2,5531545$
	$10,2393773 : 2$
	$5,1196886$
	$\log. 4 = 0,6020600$
	$\log. 32932,7 = 4,5176286$;
	$S = 32932,7$.

§. 81.

Aufgabe. Es sind (Fig. 13.) in dem Vierecke ABCD die beyden Diagonalen AC, BD, und der Winkel AEB, welchen sie einschließen, gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Man bezeichne AC mit D, BD mit d, BE mit ν, AEB mit α, DE mit $d - \nu$, so ist das aus B gefällte Perpendikel $BG = \nu \sin. \alpha$, und das aus D gefällte $DF = (d - \nu) \sin. \alpha$; also

$$S = \tfrac{1}{2} D (\nu \sin. \alpha + (d - \nu) \sin. \alpha) = \tfrac{1}{2} Dd \sin. \alpha.$$

Z. B. Es sey $D = 456{,}7$; $d = 343{,}2$; $\alpha = 106° 6'$.

$$\begin{aligned}
\log. D &= 2{,}6596310\\
\log. d &= 2{,}5355473\\
\log. \sin. \alpha &= 9{,}9826236\\
\hline
& 15{,}1778019 - 10\\
\log. 2 &= 0{,}3010300\\
\hline
& 4{,}8767719 = \log. 75296;\\
S &= 75296.
\end{aligned}$$

§. 82.

Aufgabe. Es sind (Fig. 14.) in dem Vierecke ABCD die Seiten AB, AD, und die Winkel BAC, DAC, ADC gegeben; man soll desselben Inhalt finden.

Auflösung. Man fälle aus B und D auf die, ihrer Lage nach gegebene Diagonale AC die Perpendikel BF, DE, so ist $S = \frac{1}{2} AC (BF + DE)$. Nun ist, wenn man die gegebenen Seiten AB, AD mit a, d, und die gegebenen Winkel BAC, DAC mit α, β, und ADC mit D bezeichnet,

$$AC = \frac{d \sin. D}{\sin. (\beta + D)}; \; DE = d \sin \beta, \text{ und } BF = a \sin. \alpha;$$

also

$$S = \frac{d \sin. D}{2 \sin. (\beta + D)} (a \sin. \alpha + d \sin. \beta).$$

Z. B. Es sey $a = 274{,}2$; $d = 273$; $\alpha = 72° 46'$; $\beta = 40° 24'$; $D = 87°$.

$$\begin{aligned}
\log. \sin. \beta &= 9{,}8116554 \\
\log. d &= 2{,}4361626 \\
\hline
\log. 176{,}936 &= 12{,}2478180 - 10 \\
\log. \sin. \alpha &= 9{,}9800516 \\
\log. a &= 2{,}4380675 \\
\hline
\log. 261{,}890 &= 12{,}4181191 - 10 \\
176{,}936 & \\
\hline
\log. 438{,}826 &= 2{,}6422923 \\
\log. d &= 2{,}4361626 \\
\log. \sin. D &= 9{,}9994044 \\
\hline
& 15{,}0778593 - 10
\end{aligned}$$

log.

$$\log.\ \text{sin.}\ (B + D) = 9{,}9000473$$
$$\log.\ 2 = 0{,}3010300$$
$$10{,}2010772 - 10$$
$$15{,}0778593 - 10$$
$$4{,}8767821 = \log.\ 75297{,}7$$
$$S = 75297{,}7$$

§. 83.

Aufgabe. Es sind (Fig. 15.) in dem Vierecke ABCD die Seiten AB, AD, und die Winkel B, C, D gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Man ziehe AG mit DC, GE mit AD parallel, und BF auf CD senkrecht, so ist

$S = \frac{1}{2}\,(AG\,(Bf + 2\,Ff) + EC \times Ff)$. Nun ist

$AG = \frac{a\ \text{sin.}\ B}{\text{sin.}\ C}$; $Bf = a\ \text{sin.}\ (B + C)$;

$Ff = d\ \text{sin.}\ D$; $EC = \frac{d\ \text{sin.}\ (C + D)}{\text{sin.}\ C}$; also

$$S = \frac{a\ \text{sin.}\ B}{2\ \text{sin.}\ C}\,(a\ \text{sin.}\ (B + C) + 2\,d\ \text{sin.}\ D) + \frac{d^2\ \text{sin.}\ D\ \text{sin.}\ (C + D)}{2\ \text{sin.}\ C}.$$

Z. B. Es sey $a = 274{,}2$; $d = 273$; $D = 87^\circ$; $C = 97^\circ\ 35'\frac{1}{2}$; $B = 62^\circ\ 14'\frac{1}{2}$.

$$\log.\ 2 = 0{,}3010300$$
$$\log.\ \text{sin.}\ C = 9{,}9961765$$
$$10{,}2972065 - 10$$

$$\log.\ \sin.\ (B + C) = 9{,}5375070$$
$$\log.\ \sin.\ B = 9{,}9469039$$
$$2\ \log.\ a = 4{,}8761350$$
$$24{,}3605459 - 20$$
$$10{,}2972065 - 10$$
$$4{,}0633394 = \log.\ 11570{,}1$$

$$\log.\ \sin.\ D = 9{,}9994044$$
$$\log.\ \sin.\ B = 9{,}9469039$$
$$\log.\ a = 2{,}4380675$$
$$\log.\ d = 2{,}4361626$$
$$\log.\ 2 = 0{,}3010300$$
$$25{,}1215684 - 20$$
$$10{,}2972065 - 10$$
$$4{,}8243619 = \log.\ 66736{,}4$$

$$2\ \log.\ d = 4{,}8723252$$
$$\log.\ \sin.\ (C + D) = 8{,}9033820$$
$$\log.\ \sin.\ D = 9{,}9994044$$
$$23{,}7751116 - 20$$
$$10{,}2972065 - 10$$
$$3{,}4779051 = \log.\ 3005{,}41$$

$$S = 11570{,}1 + 66736{,}4 - 3005{,}41 = 75301{,}09.$$

§. 84.

Ist AB mit CD parallel, so wird $B + C = 2R$; folglich $\sin. B = \sin. C$, und $\sin. (B + C) = 0$; also ist für eine Trapez

$$S = d \sin. D \left(a + \frac{d \sin. (C + D)}{2 \sin. C}\right), \text{ und}$$

$S = a d \sin. D$, wenn auch $C + D = 2R$, oder aus der Trapez ein Parallelogram geworden ist.

§. 85.

Aufgabe. Es sind (Fig. 16.) in dem Vierecke ABCD die Seiten AB, CD, und die Winkel B, C, D gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Man fälle aus A und D die Perpendikel AF, DE, und wieder aus A das Perpendikel AG, so ist

$$S = \tfrac{1}{2}(DE \times EC + AF \times BF + AG(DE + AF)).$$

Nun ist $DE = c \sin. C$; $AF = a \sin. B$; folglich (§. 74.)

$$S = \tfrac{1}{4}(c^2 \sin. 2C + a^2 \sin. 2B + 2AG(c \sin. C + a \sin. B)).$$

Da ferner $DG = c \sin. C - a \sin. B$, und $DAG = 2R - (C + D)$, so wird

$$AG = -(c \sin. C - a \sin. B) \cot. (C + D); \text{ also}$$

$$S = \tfrac{1}{4}(c^2 \sin. 2C + a^2 \sin. 2B - 2 \cot. (C + D)(c^2 \sin. C^2 - a^2 \sin. B^2)).$$

Z. B. Es sey $a = 274,2$; $c = 222,7$; $B = 62^\circ\ 14'\tfrac{1}{2}$; $C = 97^\circ\ 35'\tfrac{1}{2}$; $D = 87^\circ$.

$\log.\ \sin.\ 2C = 9,4181495$	$\log.\ \sin.\ 2B = 9,9160805$
$2 \log.\ c = 4,6955416$	$2 \log.\ a = 4,8761350$
$14,1136911$	$14,7922155$
-10	-10
$\log.\ 4 = 0,6020600$	$\log.\ 4 = 0,6020600$
$\log.\ 3248,1 = 3,5116311$	$\log.\ 15493,6 = 4,1901555$
$\frac{c^2 \sin.\ 2C}{4} = -3248,1$	$\frac{a^2 \sin.\ 2B}{4} = +15493,6$
$l.\cot.(C+D) = 11,0952212$	$l.\cot.(C+D) = 11,0952212$
$2 \log.\ c = 4,6955416$	$2 \log.\ a = 4,8761350$
$2 \log.\ \sin.C = 19,9923530$	$2 \log.\ \sin.B = 19,8938078$
$35,7831164$	$35,8651646$
-30	-30
$\log.\ 2 = 0,3010300$	$\log.\ 2 = 0,3010300$
$\log.\ 303449 = 5,4820858$	$\log.\ 366551 = 5,5641340$
$\tfrac{1}{2} \cot.\ (C+D)\ c^2 \sin.\ C^2$	$\tfrac{1}{2} \cot.\ (C+D)\ a^2 \sin.\ B$
$= -303449$	$= +366551$
$-3248,1$	$+15493,6$
$-306697,1$	$+382044,6$
	$-306697,1$
	$S = 75347,5$

§. 86.

§. 86.

Offenbar ist in diesem Zahlenbeyspiele der Inhalt zu groß ausgefallen. Es müssen nämlich die Seiten und Winkel genauest gemessen worden seyn, wenn daraus der Inhalt richtig gefunden werden soll; verändert man eine Seite nur um einen oder den andern Zoll, so verändert sich der Inhalt schon um mehrere Quadratfuß. Diese Formel ist daher zum Gebrauche nicht wohl anzurathen.

§. 87.

Ist AB mit CD parallel, also ABCD eine Trapez, so wird $\sin. 2C = -\sin. 2B$; also

$$S = \frac{c^2 - a^2}{4} (\sin. 2C - 2\cot. (C+D) \sin. C^2).$$

§. 88.

Aufgabe. Es sind (Fig. 15.) in dem Vierecke ABCD die Seiten AB, AD, CD, und die Winkel B, C, D gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Man ziehe AG mit CD parallel, und BF auf CD senkrecht, so ist

$$S = \frac{Bf \times AG}{2} + Ff \frac{AG + CD}{2} = \tfrac{1}{2} (AG(Bf + Ff) + CD \times Ff).$$

Setzt man an die Stellen dieser Linien die schon (§. 83.) gefundenen Werthe, oder ihre bisher gebrauchten Bezeichnungen, so wird

$$S = \frac{a \sin. B}{2 \sin. C} (a \sin. (B+C) + d \sin. D) + \tfrac{1}{2} cd \sin. D.$$

Z. B. Es sey $a = 274$; $c = 222,6$; $d = 273$; $B = 62° \; 14'\frac{1}{2}$; $C = 97° \; 35'\frac{1}{2}$; $D = 87°$.

Auf die Weise, wie (§. 83.) gezeigt worden, erhält man

$$\frac{a \sin. B}{2 \sin. C} (a \sin. (B + C) + d \sin. D) = 11570,1$$
$$+ 33368,2 = 44938,3.$$

Die fernere Rechnung kömmt so zu stehen:

$$\log. \sin. D = 9,9994044$$
$$\log. d = 2,4361636$$
$$\log. c = 2,3477708$$
$$14,7833388 - 10$$
$$\log. 2 = 0,3010300$$
$$4,4823088 = \log. 30360,5$$
$$S = 44938,2 + 30360,5 = 75298,7.$$

§. 89.

Ist $B + C = 2R$, oder AB mit CD parallel, so wird $\sin. (B + C) = 0$, $\sin. B = \sin. C$; also $S = \frac{1}{2} d \sin. D (a + c)$.

§. 90.

Aufgabe. Es sind (Fig. 17.) in dem Vierecke ABCD die Seiten BC, AD, CD, und die Winkel C, D gegeben: den Inhalt zu finden.

Auf-

Auflösung. Man fälle aus A auf CD das Perpendikel AE, auf dieses aus B das Perpendikel BF, und wieder auf dieses aus C das Perpendikel CG, so ist

$$S = \frac{DE \times AE}{2} + \frac{AF \times BF}{2} + GC\,\frac{CE \times BF}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}(DE \times AE + BF \times AE + EC \times GC).$$

Nun ist $DE = d\cos. D$; $AE = d\sin. D$; $GB = - b\cos. C$; $GC = b\sin. C$; $EC = c - d\cos. D$; $BF = c - d\cos. D - b\cos. C$; also

$$S = \tfrac{1}{2}(d^2 \cos. D \sin. D. + d\sin. D\,(c - d\cos. D - b\cos. C) + b\sin. C\,(c - d\cos. D))$$

$$= \tfrac{1}{2}c\,(d\sin. D + b\sin. C) - \tfrac{1}{2}bd\sin.(C + D).$$

Z. B. Es sey $b = 370{,}4$; $c = 222{,}7$; $d = 273$; $C = 97° 35'\tfrac{1}{2}$; $D = 87°$.

log. sin. C = 9,9961765	log. sin. D = 9,9994044
log. b = 2,5686973	log. c = 2,3477708
log. c = 2,3477708	log. d = 2,4361636
14,9126346	14,7833388
— 10	— 10
0,3010300	0,3010300
lg. 40888,8 = 4,6116046	lg. 30360,5 = 4,4823088

log.

$$\log. \sin. (C + D) = 8{,}9033820$$
$$\log. b = 2{,}5686973$$
$$\log. d = 2{,}4361613$$

$$13{,}9082406 - 10$$
$$0{,}3010300$$

$$3{,}6072106 = \log. 4047{,}72$$

$$S = 40888{,}8 + 30360{,}5 + 4047{,}72$$
$$= 75297{,}02.$$

§. 91.

Läuft AD mit BC parallel, so wird aus den nun schon bekannten Gründen

$$S = \tfrac{1}{2} c \sin. C (b + d).$$

§. 92.

Aufgabe. Es sind (Fig. 18.) in dem Vierecke ABCD die Seiten AD, BC, CD, und die Winkel B, C, D gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Man ziehe DG mit BC parallel, und fälle aus A das Perpendikel AF, so ist

$$S = Ff \frac{GD + BC}{2} + \frac{GD \times Af}{2}$$
$$= \tfrac{1}{2} (GD (Ff + Af) + BC \times Ff).$$

Nun

Nun ist $Af = - d \sin. (C + D)$; $Ff = c \sin. C$;

$$GD = \frac{- d \sin. (B + C + D)}{\sin. B}; \text{ also}$$

$$S = \frac{- d \sin. (B + C + D)}{2 \sin. B} (c \sin. C - d \sin. (C+D))$$
$$+ \tfrac{1}{2} bc \sin. C.$$

Z. B. Es sey $b = 370,4$; $c = 222,7$; $d = 273$; $B = 62^\circ\ 14'\tfrac{1}{2}$; $C = 97^\circ\ 35'\tfrac{1}{2}$; $D = 87^\circ$.

$$\begin{array}{rl} \log. \sin. B = & 9,9469034 \\ \log. 2 = & \underline{0,3010300} \\ & 10,2479334 - 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log. \sin. (B+C+D) = & 9,9634877 \\ \log. \sin. C = & 9,9961765 \\ \log. c = & 2,3477708 \\ \log. d = & \underline{2,4361613} \\ & 24,7435963 - 20 \\ & \underline{10,2479334} - 10 \\ & 4,4956629 = \lg. 31308,52 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log. \sin. (B + C + D) = & 9,9634877 \\ \log. \sin. (C + D) = & 8,9033820 \\ 2 \log. d = & \underline{4,8723226} \\ & 23,7391923 - 20 \\ & \underline{10,2479334} - 10 \\ \log. 3099,26 = & 3,4912589 \end{array}$$

log.

$$\log.\ \sin.\ C = 9,9961765$$
$$\log.\ b = 2,5686973$$
$$\log.\ c = 2,3477708$$
$$14,9126446 - 10$$
$$\log.\ 2 = 0,3010300$$
$$\log.\ 40888,92 = 4,6116146$$

$$S = 31308,52 + 40888,92 + 3099,26 = 75296,7.$$

§. 93.

Aufgabe. Es sind (Fig. 14.) in dem Vierecke ABCD die Seiten AB, BC, CD, AD, und die Winkel B, D gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Man ziehe die Diagonale AC, so ist $ABC = \frac{1}{2}\, ab\ \sin.\ B$, und $ACD = \frac{1}{2}\, cd\ \sin.\ D$; also

$$S = \tfrac{1}{2}(ab\ \sin.\ B + cd\ \sin.\ D).$$

Z. B. Es sey $a = 274,2$; $b = 370,4$; $c = 222,7$; $d = 273$; $B = 62^\circ\ 14'\frac{1}{2}$; $D = 87^\circ$.

log. a = 2,4380675	log. c = 2,3477708
log. b = 2,5686973	log. d = 2,4361626
log. sin. B = 9,9469039	log. sin. D = 9,9994044
4,9536687	4,7833378
log. 2 = 0,3010300	log. 2. = 0,3010300
l. 44940,57 = 4,6526387	l. 30360,34 = 4,4823078

$$S = 44940,57 + 30360,34 = 75300,91.$$

§. 94.

§. 94.

Alle Vielecke lassen sich in Drey= und Vierecke, als ihre Bestandtheile, auflösen. Daher haben wir uns, durch die vorausgeschickte Inhaltsberechnung dieser einfachen Figuren, zur Berechnung der zusammengesetzten Figuren, oder der Vielecke schon vorläufig den Weg gebahnet. Der Inhalt eines Vieleckes kann auf dreyfache Weise gefunden werden, durch Zerlegung in Dreyecke, Trapezoiden und Trapezen. Denn indem man von jedem Dreyecke, oder Vierecke insbesondere den Inhalt suchet, und die gefundenen addirt, erhält man den Inhalt des Vieleckes, der gesuchet werden sollte. So kurz diese Lehre ist, und so leicht die Anwendung derselben scheinen mag, glaube ich dennoch, daß es noch immer der Mühe lohne, dieselbe etwas näher zu beleuchten.

§. 95.

Aufgabe. In dem Vielecke AB .... FG (Fig. 19.) sind alle Seiten und Winkel gegeben: den Inhalt zu finden.

1. Auflösung. Man zerlege die gegebene Figur auf schickliche Weise in Dreyecke. — Da nun in dem Dreyecke ABG der Winkel bey A, und die ihn einschließenden Seiten AB, AG bekannt sind, so ist desselben Inhalt (§. 76.)

$$S = \tfrac{1}{2}\, AB \times AG \times \sin. BAG.$$

Es ist aber auch (§. 73.)

$$S = \frac{\tfrac{1}{2}\, AG^2}{\cot. AGB + \cot. BAG};\ \text{also}$$

$$\cot. AGB = \frac{\tfrac{1}{2}\, AG^2}{S} - \cot. BAG.$$

Aus dem gefundenen Winkel AGB ergiebt sich auch der Winkel ABG, und aus diesem und dem gegebenen ABC der Winkel GBC. Nun ist wieder

$$S = \frac{1}{2} AG \times BG \times \sin. AGB; \text{ also}$$

$$BG = \frac{2S}{AG \times \sin. AGB}.$$

Demnach sind in dem Dreyecke BCG nebst der Seite BC noch die Seite BG, und der Winkel CBG bekannt, und es läßt sich auf die nämliche Weise sowohl der Inhalt dieses Dreyeckes, als die Seite CG, und der Winkel CGF des folgenden dritten Dreyeckes finden. Setzt man dieses Verfahren bis an das andere Ende der Figur fort, so ergiebt sich allmählig der Inhalt der ganzen Figur.

2. Auflösung. Man zerlege die Figur in Trapezoiden. — Da in der Trapezoid ABCG die Winkel BAG, ABC, und die Seiten AG, AB, BC bekannt sind, so läßt sich daraus der Inhalt finden. Denn es sey $GAB = C$; $ABC = D$; $AG = b$; $AB = c$; $BC = d$, so ist (§. 90.)

$$S = \frac{1}{2} c (d \sin. D + b \sin. C) - \frac{1}{2} bd \sin. (C + D).$$

Es ist aber auch, den Winkel $CGA = B$ angenommen (§. 92.)

$$S = \frac{-d \sin. (B + C + D)}{2 \sin. B} (c \sin. C - d \sin. (C + D))$$
$$+ \frac{1}{2} bc \sin. C, \text{ und daher}$$

$$\cot. B = \frac{(2S - bc \sin. C) : d^2 \sin. (C + D)^2}{1 - c \sin. C : d \sin. (C + D)} - \cot. (C + D).$$

Aus

Aus dem so gefundenen Winkel CGA, und dem gegebenen AGF, ergiebt sich auch der Winkel CGF in der Trapezoid CEFG.

Nimmt man auch die Seite CG = a an, so ist (§. 93.)

$$S = \frac{1}{2}(ab \sin. B + cd \sin. D),$$ und daher

$$a = \frac{2S - cd \sin. D}{b \sin. B}.$$

Da nun in dieser Trapezoid die Winkel CGF, GFE, und die Seiten CG, GF, FE bekannt sind, so läßt sich auf ähnliche Weise derselben Inhalt finden. Bleibt zuletzt ein Dreyeck übrig, so wird es nach (§. 76.) berechnet.

3. Auflösung. Man zerlege (Fig. 20.) die Figur AB.... FG, indem man durch alle Eckpunkte mit einer gegebenen, oder willkührlich angenommenen MN, parallele Linien zieht, in Trapezen, und zwey an beyden Enden befindliche Dreyecke. — Da in dem Dreyecke AGg die Seite AG, und die ihr anliegenden Winkel bekannt sind, so ist (§. 73.)

$$S = \frac{\frac{1}{2} AG^2}{\cot. gAG + \cot. AGg}.$$

Es ist aber auch

$$S = \frac{1}{2}(AG \times Ag \times \sin. GAg),$$ und wieder

$$S = \frac{1}{2}(AG \times Gg \times \sin. AGg);$$ also

$$Ag = \frac{2S}{AG \times \sin. GAg}.$$

$$Gg = \frac{2S}{AG \times \sin. AGg}.$$

Weil

Weil nun in dem Dreyeck AGg alle Seiten und Winkel bekannt sind, so lassen sich nebst den beyden Seiten Bg, Gg auch alle Winkel der Trapez BbGg daraus ableiten, und daher ist derselben Inhalt (§. 84.)

$$S = Bg \sin. gBb \left(Gg + \frac{Bg \times \sin.(gBb + BbG)}{2 \sin. BbG}\right).$$

Es ist aber auch

$$S = \tfrac{1}{2}(Bb + Gg)\, Bg \times \sin. gBb, \text{ und wieder}$$

$$S = \tfrac{1}{2}(Bb + Gg)\, Gb \times \sin. GbB; \text{ also}$$

$$Bb = \frac{2S}{Bg \times \sin. gBb} - Gg, \text{ und}$$

$$Gb = \frac{2S}{(Bb + Gg) \times \sin. GbB}.$$

Aus den nun gefundenen Seiten und Winkeln der Trapez BbGg ergeben sich durch leichte Schlüsse die zur Berechnung des Inhaltes der folgenden Trapez bBCc erfoderlichen Seiten und Winkel. Suchet man dann auch die Seiten Cc, bc, so sind wir im Stande aus diesen, und den gleichfalls gefundenen nöthigen Winkeln den Inhalt der dritten Trapez zu finden. — Nach dieser kurzen Vorschrift lassen sich alle folgenden Trapezen berechnen, und das Dreyeck EFf am Ende, wie das Dreyeck AGg am Anfange.

§. 96.

Ich habe nun eine und dieselbe Aufgabe auf dreyfache Weise trigonometrisch aufgelöset. Die letztere ist ein-

einfacher und weniger beschwerlich, als die zweyte, und hat vor dieser, und vor der ersten den beträchtlichen Vorzug, daß sie auch die Flächentheilung, im Falle, wo die Theilungslinien alle parallel seyn sollen, gar sehr erleichtert. Zwar behauptet eben diesen Vorzug auch die gewöhnliche Methode, welche darin besteht, daß man durch alle Eckpunkte der Figur Parallelen zieht, sie und ihre senkrechten Entfernungen von einander mißt, und daraus den Flächeneinhalt berechnet; allein wer kennt nicht auch ihre wenige Sicherheit und Richtigkeit in Vergleichung mit der trigonometrischen? wer weiß nicht, welchen nachtheiligen Einfluß nicht nur die aus der Messung der Winkel und Linien auf dem Felde, sondern, und vornehmlich die aus der Zeichnung, und der Messung der Linien auf dem Papier sich ergebenden Fehler, auf sie haben? — Und eben darum verliert auch die vorzügliche Leichtigkeit dieser Methode gar viel von ihrem Werthe.

§. 97.

Ich habe diese dreyfache Auflösung durch kein Zahlenbeyspiel erläutert; theils um Raum für noch andere wichtige Wahrheiten zu gewinnen; theils, und vornehmlich, um den jungen Leser, wenn er genug wißbegierig ist, in die Nothwendigkeit zu versetzen sich durch trigonometrische Zahlenrechnungen, allein und ohne fremde Beyhilfe, durchzuarbeiten. Zu diesem Ende setze ich noch die Maaße her, welche in beyden letztern Figuren die innern Winkel und die Linien gemessen haben:

Die Seite AB = 361′		der Winkel A = 113° 23′	
BC = 383		B = 84	44
CD = 308		C = 270	31
DE = 400		D = 105	55
EF = 599		E = 91	37
FG = 565,5		F = 112	37
GA = 531		G = 121	13

Anwendung auf die Theilung geradliniger Figuren.

§. 98.

Die Theilung geradliniger Figuren gehört unter die vornehmsten Operationen des Feldmessers auf dem Papier, wie auf dem Felde selbst, und besteht darin, daß ein vorgegebenes Stück Land in zwey oder mehrere, gleiche oder ungleiche Theile, gewissen vorgeschriebenen Bedingungen gemäß, getheilt wird. Wenn die Theile ungleich groß seyn sollen, muß ihr Verhältniß zu einander entweder vorgeschrieben, oder aus der Natur der Sache gefolgert worden seyn. Die Bedingungen, welche bey der Theilung eines Stückes Land zum Grunde liegen, beziehen sich gewöhnlich

1) auf die Seite, an welcher die Theilung anfangen, oder enden soll;
2) auf die Richtung der Theilungslinien, und
3) auf die Gestalt der Theile selbst.

§. 99.

§. 99.

Man kann an jeder Seite einer Figur einen oder mehrere Theile davon abschneiden; daher muß nothwendig die Seite, wo man mit der Theilung anfangen soll, vorläufig bestimmt seyn worden. In Ansehung der Theilungslinien wird gefordert, daß sie nicht gebrochen, sondern gerade seyen, und, so viel möglich ist, gleichlaufend, zuweilen auch, daß sie sich alle in einem bestimmten Punkte schneiden, oder an eine vorgeschriebene Seite stossen. Der Gestalt nach soll jedes abzuschneidende Stück so wenig, als möglich, irregulär seyn, aber auch, wo es zum bessern Gebrauche nützlich oder nothwendig ist, eine verhältnißmäßige Länge und Breite haben.

§. 100.

Aufgabe. In dem Vierecke ABEF (Fig. 21.) sind die Seite AB, und die Winkel A, B gegeben: man soll von demselben ein anderes ABCD, dessen Inhalt gegeben ist, abschneiden, so, daß die Theilungslinie DC mit AF einen gegebenen Winkel D mache.

Auflösung. Da die Winkel A, B, D bekannt sind, so ist es eben darum auch der Winkel C. Daher ist, unter den bisher angenommenen Bezeichnungen der Seiten, der Winkel, und des Inhalts (§. 83)

$$S = \frac{a \sin. B}{2 \sin. C} (a \sin. (B + C) + 2 d \sin. D)$$

$$+ \frac{d^2 \sin. D \sin. (C + D)}{2 \sin. C}.$$

Weil in dieser Gleichung alle Größen, AD = d ausgenommen, bekannt sind, so läßt sich dieses d finden, und damit die Theilungslinie DC bestimmen. Zu diesem Ende gebe man der Gleichung folgende Gestalt:

$$d^2 + d \frac{2\,a\,\sin.B}{\sin.(C+D)} = \frac{2\,S\,\sin.C - a^2\,\sin.B\,\sin.(B+C)}{\sin.D\,\sin.(C+D)};$$

oder wenn man $B + C = 4R - A - D = \phi - D$; $C = 4R - A - B - D = \lambda - D$, und $C + D = 4R - A - B = \psi$ setzt, diese:

$$d = +\sqrt{\left(\frac{a\,\sin.B}{\sin.\psi}\right)^2 + \frac{2\,S\,\sin.(\lambda - D) - a^2\,\sin.B\,\sin.(\phi - D)}{\sin.D\,\sin.\psi}}$$

$$- \frac{a\,\sin.B}{\sin.\psi}.$$

Es wird hier vorausgesetzt, daß $\psi < 2R$, folglich $\sin.\psi$ positiv sey; im entgegengesetzten Falle, oder wenn $\psi > 2R$, und daher $\sin.\psi$ negativ ist, erhält man

$$d = -\sqrt{\left(\frac{a\,\sin.B}{\sin.\psi}\right)^2 - \frac{2\,S\,\sin.(\lambda - D) - a^2\,\sin.B\,\sin.(\phi - D)}{\sin.D\,\sin.\psi}}$$

$$+ \frac{a\,\sin.B}{\sin.\psi}.$$

§. 101.

Soll die Theilungslinie DC mit AB parallel seyn, so wird $B + C = \phi - D = 2R$, also $\sin. (\phi - D) = 0$, und man erhält

$$d = \pm \sqrt{\left(\frac{a \sin. B}{\sin. \psi}\right)^2 \pm \frac{2 S \sin. (\lambda - D)}{\sin. D \sin. \psi}} \mp \frac{a \sin. B}{\sin. \psi}.$$

§. 102.

Soll auch AD mit BC parallel, und ABCD ein Parallelogram seyn, so wird (§. 100.)

$$2 a d \sin. B = \frac{2 S \sin. C}{\sin. D};\ \text{also}$$

$$d = \frac{S}{a \sin. D}.$$

§. 103.

Soll das abzuschneidende Stück ein Dreyeck seyn, so wird $a = 0$; also

$$d = \sqrt{\frac{2 S \sin. (\lambda - D)}{\sin. D \sin. \psi}} = \sqrt{\frac{2 S \sin. C}{\sin. D \sin. \psi}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 S \sin. (A + D)}{\sin. D \sin. A}} = \sqrt{2 S (\cot. A + \cot. D)}$$

§. 104.

Wird noch überdieß gefordert, daß DC auf der Seite,

mit

mit welcher sie den Richtungswinkel D einschließt, senkrecht stehe, so ergiebt sich

$$d = \sqrt{2 S \cot. A}.$$

§. 105.

Durch dieses Wenige, was bisher gesagt worden, läßt sich jedes geradlinige Vieleck in zwey, und mehrere Theile nach bestimmten Verhältnissen theilen, sofern nur jedesmal die Richtung der Theilungslinien, oder ihr Richtungswinkel bestimmt ist. — Wie nun hier aus dem gegebenen Richtungswinkel der Ort seiner Spitze gesucht wird, so giebt es hinwieder Fälle, wo jener aus diesem gesucht werden muß.

§. 106.

Aufgabe. In dem Vierecke ABEF (Fig. 21.) sind die Winkel A, B, und die Seite AB gegeben: man soll von demselben ein anderes ABCD abschneiden, so daß die Theilungslinie DC durch den in AF gegebenen Punkt D durchgehe.

Auflösung. Es war (§ 100.)

$$d^2 + d\frac{2\,a\,\sin. B}{\sin. \psi} = \frac{2 S \sin. (\lambda - D) - a^2 \sin. B \sin. (\phi - D)}{\sin. D \sin. \psi}.$$

Hieraus folgt

$$d^2 \sin. \psi + 2\,a\,d \sin. B = \frac{2 S \sin. \lambda \sin. (\lambda - D)}{\sin. \lambda \sin. D}$$

$$- \frac{a^2 \sin. B \sin. \phi \sin. (\phi - D)}{\sin. \phi \sin. D}$$

$= 2 S$

$$= 2S\,\sin.\lambda\,(\cot.D - \cot.\lambda) - a^2\,\sin.B.\,\sin.\phi\,(\cot.D - \cot.\phi)$$

$$= 2S\,(\cot.D\,\sin.\lambda - \cos.\lambda) - a^2\,\sin.B\,(\cot.D\,\sin.\phi - \cos.\phi).$$

Daher ist

$$\cot.D = \frac{d^2\,\sin.\psi + 2ad\,\sin.B - a^2\,\sin.B\,\cos.\phi + 2S\,\cos.\lambda}{-a^2\,\sin.B\,\sin.\phi + 2S\,\sin.\lambda}$$

§. 107.

Soll das abzuschneidende Stück ein Dreyeck seyn, so wird $a = 0$, und damit

$$\cot.D = \frac{d^2\,\sin.\psi + 2S\,\cos.\lambda}{2S\,\sin.\lambda} = \frac{d^2\,\sin.\psi}{2S\,\sin.\lambda} + \cot.\lambda.$$

Es ist aber $\psi = \lambda = C + D$; also wird endlich

$$\cot.D = \frac{d^2}{2S} + \cot.(C + D)$$

$$= \frac{d^2}{2S} - \cot.A.$$

§. 108.

Es wird aber die Theilungslinie DC nicht allein durch den Winkel D, sondern auch durch die Seite BC bestimmt. Daher wird diese Aufgabe (§. 106.) auch aufgelöset seyn, wenn man die Seite BC wird gefnnden haben. Nun war (§. 90.)

$$S = \tfrac{1}{2}c\,(d\,\sin.D + b\,\sin.C) - \tfrac{1}{2}bd\,\sin.(C + D),$$

und

und was dort war C; D; b; c; d

ist hier A; B; d; a; b; also

$$S = \frac{1}{2} a (b \sin. B + d \sin. A) - \frac{1}{2} b d \sin. (A + B),$$

und

$$b = \frac{2S - ad \sin A}{a \sin. B - d \sin. (A + B)}.$$

§. 109.

Soll das abzuschneidende Stück ein Dreyeck seyn, so wird a = o, und A + B < 2 R; also

$$b = \frac{2S}{d \sin. (A + B)} = \frac{2S}{d \sin. A}.$$

§. 110.

Diese beyden Aufgaben mit ihren Zusätzen enthalten die ganze Lehre von der Theilung geradliniger Figuren. Obschon der Selbstdenker sich von dieser Behauptung leicht selbst überzeugen kann, und also keiner fernern Entwicklung dieser wichtigen Lehre bedürfen möchte, will ich dennoch zum Behufe meiner andern Leser diesen Beweis noch auf mich nehmen, und zeigen, wie die vornehmsten hieher gehörigen Aufgaben trigonometrisch aufgelöset werden können.

§. 111.

Aufgabe. Es ist (Fig. 22.) in dem Vierecke ABEF der Winkel A gegeben: man soll von demselben ein gegebenes Dreyeck S gegen den Scheitel A abschneiden, so

daß

daß die Theilungslinie DC mit AB, einer von des Viereckes Seiten, einen bestimmten Winkel D einschliesse.

Auflösung. Es sey AD = d die Seite des abzuschneidenden Dreyeckes, welche gesucht werden soll, so ist

$$d = \sqrt{2 S (\cot. A + \cot. D)}.$$

Z. B. Es sey $A = 50^\circ$; $D = 60^\circ$; $S = 8925$, und d soll gesucht werden.

$$\begin{aligned} \cot. A &= 0{,}8390996 \\ \cot. D &= 0{,}5773503 \\ \hline & 1{,}4164499 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. 1{,}416 &= 0{,}1510633 \\ \log. S &= 3{,}9506082 \\ \log. 2 &= 0{,}3010300 \\ \hline & 4{,}4027015 : 2 \\ & 2{,}2013507 = \log. 159 \\ & d = 159. \end{aligned}$$

§. 112.

Sollen mehrere, gleiche oder ungleiche Theile von dem Vierecke ABEF abgeschnitten, oder dieses in eine vorgeschriebene Anzahl gleicher oder ungleicher Theile getheilt werden, so berechne man aus dem Inhalte des Viereckes, der Zahl, und dem Verhältnisse der Theile die Inhalte derselben, bringe je zwey, je drey, je vier u. s. w.

gegen

gegen den Scheitel abzuschneidende Theile in eine Summe, setze für S diese Summen der Theile, auch für D den jedesmaligen Werth des Richtungswinkels, und wiederhohle die eben gelehrte Rechnung nach der Vorschrift der Formel so oft, als 1 in n der Anzahl der Theile — 1 enthalten ist. Es bedeuten S; 2S; 3S... nS die Summen der gleichen, S; S''; S'''... S^n die Summen der ungleichen Theile, D; D''; D'''... D^n die Richtungswinkel, und endlich d; d''; d'''... d^n die Werthe der Seite, welche mit dem zugehörigen Richtungswinkel den Ort der Theilungslinie bestimmt, so ergeben sich, in so fern die Summen der Theile noch Dreyecke sind, für gleiche Theile die Formeln:

$$d = \sqrt{2S(\text{cot. }A + \text{cot. }D)}$$
$$d'' = \sqrt{4S(\text{cot. }A + \text{cot. }D'')}$$
$$d''' = \sqrt{6S(\text{cot. }A + \text{cot. }D''')} \text{ u. s. w.}$$

für ungleiche aber die Formeln:

$$d = \sqrt{2S(\text{cot. }A + \text{cot. }D)}$$
$$d'' = \sqrt{2S''(\text{cot. }A + \text{cot. }D'')}$$
$$d''' = \sqrt{2S'''(\text{cot. }A + \text{cot. }D''')} \text{ u. s. w.}$$

§. 113.

Weiß man daher, wie ein gegebenes Stück von einer Figur abgeschnitten werden müsse, so hat auch schon die Theilung dieser Figur in mehrere, gleiche oder ungleiche, Theile keine Beschwerniß mehr auf sich. Aus dieser Ursache

sache werde ich künftig nur zeigen, wie von jeder geradlinigen Figur ein Stück, den jedesmaligen Bedingungen gemäß, müsse abgeschnitten werden, und mich begnügen, zur Theilung einer Figur in mehrere Theile hier diese kurze Anleitung gegeben zu haben.

§. 114.

Sollen die Theilungslinien alle unter sich parallel seyn, so bleibt der Richtungswinkel in allen obigen Formeln unverändert, und immer = D.

§. 115.

Aufgabe. Es ist in dem Vierecke ABEF der Winkel A gegeben: man soll von demselben ein gegebenes Dreyeck S gegen den Scheitel A abschneiden, so daß die Theilungslinie DC die Seite AB in dem bestimmten Punkte D schneide.

Auflösung. Den Bedingungen dieser Aufgabe kann auf doppelte Weise Genügen geschehen; indem man von der Theilungslinie DC entweder den Richtungswinkel D, oder die demselben gegenüber stehende Seite AC suchet. Auf die erste Weise ist (§. 107.)

$$\cot. D = \frac{d^2}{2S} - \cot. A,$$

auf die zweyte, AC = b angenommen, ist (§. 109.)

$$b = \frac{2S}{d \sin. A}.$$

Z. B. Es sey $A = 50^\circ$; $S = 8925$; $d = 159$.

log. S = 3,9506082	log. d = 2,2013507
log. 2 = 0,3010300	log. sin. A = 9,8842540
4,2516382	12,0856047
	− 10
2,0856047	

2,1660335 = log. 146,6

b = 146,6.

§. 116.

Aufgabe. Es ist (Fig. 23.) innerhalb des Viereckes ABEF ein Punkt D durch die Linie DA und den Winkel DAC gegeben: man soll ein gegebenes Dreyeck S abschneiden, so daß die Theilungslinie durch den gegebenen Punkt D durchgehe, und AF schneide.

Auflösung. Es sey DC die zu suchende Theilungslinie; $AD = \delta$; $AC = \beta$; $DAC = A$, so ist (§. 109.)

$$\beta = \frac{2S}{\delta \text{ sin. } A}.$$

§. 117.

Aus dieser und der vorigen Aufgabe wird auch begreiflich, wie man verfahren müsse, wenn ein Dreyeck in mehrere, gleiche oder ungleiche Theile soll getheilt werden, und jede Theilungslinie durch einen besondern, in-

nerhalb

nerhalb oder am Umfange des Dreyeckes gegebenen Punkt durchgehen.

§. 118.

Es darf aber, was bisher nur der Einfachheit wegen angenommen worden, das Ganze, wovon ein gegebenes Stück soll abgeschnitten werden, nicht eben ein Dreyeck oder Viereck, sondern kann auch überhaupt ein geradliniges Vieleck seyn; allein, sollen diese Formeln noch können gebraucht werden, so muß das abzuschneidende Stück immer die Gestalt eines Dreyeckes haben.

§. 119.

Aufgabe. Es sind (Fig. 24.) in dem Vierecke ABEF die Winkel A, B, und die Seite AB gegeben: man soll von demselben eine gegebene Trapez S abschneiden, so daß die Theilungslinie DC mit AB parallel sey.

Auflösung. Weil AB mit der Theilungslinie DC parallel seyn soll, und A und B bekannt sind, so sind es eben darum auch C und D; daher ist

$$d = \pm \sqrt{\left(\frac{a \text{ sin. } C}{\text{sin. } (C + D)}\right)^2 \pm \frac{2 S \text{ sin. } C}{\text{sin. } D \text{ sin. } (C + D)}} \mp \frac{a \text{ sin. } C}{\text{sin. } (C + D)}$$

z. B. Es sey $A = 105^\circ\ 26'$; $B = 102^\circ\ 57'$; $a = 274,2$; $S = 75300$.

log. sin. C = 9,9888113
log. a = 2,4380675

12,4268788 − 10

log.

$$\log.\sin.(C+D) = 9,6770302 - 10$$

$$2,7498486 \times 2$$

$$5,4996972 = 316007,3$$

$$\log.\sin.C = 9,9888113$$

$$\log.S = 4,8767950$$

$$\log.2 = 0,3010300$$

$$25,1666363 - 20$$

$$\log.\sin.(C+D) = 9,6770302$$

$$\log.\sin.D = 9,9840503$$

$$19,6610805 - 20$$

$$5,5055558 = \log.320300,7$$

$$\log.\frac{a\sin.C}{\sin.(C+D)} = 2,7498486 = \log.562,1$$

$$316007,3$$

$$320300,7$$

$$\sqrt{636308} = 797,6$$

$$562,1$$

$$d = 235,5.$$

§. 120.

Aufgabe. Es sind (Fig. 21.) in dem Vierecke ABEF die Winkel A, B, und die Seite AB gegeben: man soll von demseben eine gegebene Trapezoid S abschneiden, so, daß die Theilungslinie DC durch einen in der Seite AF gegebenen Punkt D durchgehe.

Auf-

Auflösung. Weil der Punkt D gegeben ist, ist es eben darum auch AD. Daher ist BC, welche mit dieser die Richtung und Lage der Theilungslinie DC bestimmt (§. 108.), oder

$$b = \frac{2S - ad\,\text{sin.}\,A}{a\,\text{sin.}\,B - d\,\text{sin.}\,(A + B)}.$$

Z. B. Es sey $A = 113^\circ\ 10'$; $B = 62^\circ\ 14'\tfrac{1}{2}$; $D = 87^\circ$; $a = 274{,}2$; $d = 273$; $S = 75296{,}3$.

$$\begin{aligned}
\log.\ \text{sin.}\,A &= 9{,}9634877\\
\log.\ a &= 2{,}4380675\\
\log.\ d &= 2{,}4361626\\
\hline
&\ 14{,}8377178 - 10 = \log.\ 68820{,}5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2S &= 150592{,}6\\
&\ \ \ 68820{,}5\\
\hline
&\ \ \ 81772{,}1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&l.\ \text{sin.}\,B = 9{,}9469039 && \text{lg.sin.}(A+B) = 8{,}9033320\\
&\log.\ a = 2{,}4380675 && \log.\ d = 2{,}4361626\\
\hline
&l.\,242{,}6 = 12{,}3849714 && \text{lg.}\,21{,}85 = 11{,}3394946\\
&\qquad\qquad\quad -10 && \qquad\qquad\quad -10\\
&\ \ 21{,}85 &&\\
\hline
&\ 220{,}75 &&
\end{aligned}$$

$$\frac{81772{,}1}{220{,}75} = 370{,}4$$

$$b = 370{,}4.$$

§. 122.

§. 121.

Aufgabe. Man soll von dem Vierecke ABEF eine gegebene Trapezoid S abschneiden, so daß die Theilungslinie DC durch einen innerhalb des Viereckes gegebenen Punkt D durchgehe.

Auflösung. Vorausgesetzt, daß die Linie AD, welche nebst dem Winkel DAB = A′ die Lage des Punktes D bestimmt, zugleich das abzuschneidende Stück begränzen solle, ist wieder

$$b = \frac{2S - a'd \sin. A'}{a' \sin. B - d \sin. (A' + B)}.$$

§. 122.

Auf eben diese Weise kann man auch verfahren, wenn noch eine zweyte Trapezoid ꝛc. unter eben denselben Bedingungen soll abgeschnitten werden, nachdem man doch vorläufig die Seite DC, und den Winkel DCB aus den Formeln (§. 95. Auflös. 2.) berechnet hat.

§. 123.

Aufgabe. Es sind (Fig. 21.) in dem Vierecke ABEF die Winkel A, B, und die Seite AB gegeben: man soll von demselben eine gegebene Trapezoid ABCD abschneiden, so daß die Theilungslinie DC die Seite AF unter einem gegebenen Winkel D schneide.

Auflösung. Es sey AD = d die Seite des abzuschneidenden Stückes, welche gesucht werden soll, so ist (§. 101.)

$$d = \pm\sqrt{\left(\frac{a\,\text{fin. }B}{\text{fin. }(C+D)}\right)^2 \pm \frac{2\,S\,\text{fin. }C - a^2\,\text{fin. }B\,\text{fin. }(B+C)}{\text{fin. }D\,\text{fin. }(C+D)}} \mp \frac{a\,\text{fin. }B}{\text{fin. }(C+D)}.$$

Z. B. Es sey $A = 113^\circ\ 10'$; $B = 62^\circ\ 14'\tfrac{1}{2}$; $D = 87^\circ$; $a = 274,2$; $S = 75296,3$.

log. fin. B = 9,9469039
log. a = 2,4380675

12,3849714 − 10
log. fin. (C + D) = 8,9033828

log. 3031,02 = 3,4815886 × 2
log. 9187076 = 6,9631772
log. fin. C = 9,9961765
log. S = 4,8767736
log. 2 = 0,3010300

25,1739801 − 20
log. fin. (C + D) = 8,9033828
log. fin. D = 9,9994044

18,9027872 − 20

6,2711929 = log. 1867209.

$$\log.\sin.(B+C) = 9{,}5375070$$
$$\log.\sin.B = 9{,}9469039$$
$$2\log.a = 4{,}8761350$$

$$24{,}3605459 - 20$$
$$18{,}9027872 - 20$$

$$5{,}4577587 = \log. 286918{,}5$$

$$9187076$$
$$286918{,}5$$

$$9473994{,}5$$
$$1867209 \quad 3031{,}02$$

$$\sqrt{7606785{,}5} = 2758{,}03$$
$$d = 272{,}99 = 273.$$

§. 124.

Aufgabe. Man soll (Fig. 20.) von dem Vielecke ABCDEFG gegen A ein gegebenes Stück S abschneiden, so daß die Theilungslinie mit der gegebenen MN parallel laufe.

Auflösung. Man ziehe durch alle Eckpunkte der Figur nach der Ordnung Linien mit MN parallel, und berechne auf die (§. 95.) ausführlich gelehrte Weise die nur gezogenen Parallelen, und die Inhalte von den Dreyecken und Trapezen, in welche so das Vieleck getheilt worden. Man addire zum Dreyecke AGg die erste Trapez

pez BbGg, und schreibe die Summe besonders; man addire zu dieser Summe die zweyte Trapez, und schreibe die Summe wieder besonders, u. s. w. Nun vergleiche man diese besondern Summen nach der Ordnung mit dem Inhalte des abzuschneidenden Stückes, und suche, welche in Ansehung dessen die nächst kleinere sey. Es sey z. B. die Summe aus dem Dreyecke und den beyden folgenden Trapezen = p, die nächst kleinere, oder $p < S$, so muß die Theilungslinie VX nothwendig zwischen die beyden Parallelen Cc und Dd fallen. Zieht man ferner p von S ab, so ist $S - p = s$ das Stück CcVX, was von der Trapez CcdD noch abgeschnitten werden muß, um das abzuschneidende Stück S vollends zu erhalten. — Das Abschneiden des Stückes s geschieht nach der (§. 119.) angegebenen Formel, das, weil schon aus der Berechnung des Inhaltes von dem ganzen Vielecke (§. 95.) in der Trapez CcdD nebst den vier Winkeln die Seite Cc bekannt ist, keine Beschwerniß mehr auf sich hat.

§. 125.

Aufgabe. Man soll (Fig. 26.) von dem Vielecke ABCDEFG gegen A ein gegebenes Stück S abschneiden, so daß die Theilungslinie durch einen bestimmten, in einer von des Vieleckes Seiten gelegenen Punkt L durchgehe.

Auflösung. Man zerlege das Vieleck aus dem Punkte L in Dreyecke, und berechne nach der Ordnung derselben Inhalte, und die Seiten, welche in dem Punkte L zusammenstossen; die gefundenen Dreyecke bringe man je zwey, je drey u. s. w. in eine Summe, und vergleiche

jede dieser besondern Summen, wie schon bey Auflösung der vorigen Aufgabe ist gelehrt worden, mit dem abzuschneidenden Stücke S. Es sey die Summe aus dem ersten und zweyten Dreyecke = p, zunächst kleiner als das abzuschneidende Stück S, so kömmt die Theilungslinie LX in dem dritten Dreyecke BCL zwischen BL und CL zu liegen, und BXL = s = S — p ist das, von dem Dreyeck BCL noch abzuschneidende Stück, von welchem die Seite BX nach der (§. 115.) angeführten Formel gefunden wird.

§. 126.

Aufgabe. Man soll (Fig. 27.) von dem Vielecke ABCDEFG ein gegebenes Stück abschneiden, so, daß die Theilungslinie durch einen innerhalb des Vieleckes gelegenen Punkt L, welchen die Linie AL, und der Winkel BAL bestimmen, durchgehe.

Auflösung. Man zerlege das Vieleck aus L in Dreyecke, und berechne, von dem ABL angefangen, nach der Ordnung derselben Inhalte, und nach L hinlaufende Seiten. Die Möglichkeit, diese Vorschrift in Ausübung zu bringen, erhellet daraus, daß in dem Dreyecke ABL, mit dessen Berechnung der Anfang gemacht werden soll, nebst der Seite AB noch die Seite AL und der Winkel BAL, welche die Lage des Punkts L bestimmen, als bekannt können angenommen werden. — Aus Vergleichung der besondern Summen, die man durch wiederholtes Addiren der erstern Dreyecke zu dem jedesmal folgenden erhält, mit dem abzuschneidenden Stücke S ergiebt sich das Dreyeck, in welches die Theilungslinie fällt. Gesetzt, die Theilungs-

lungslinie LX falle in das Dreyeck DCL, so ist CXL das Dreyeck, was zu den zwey erstern noch addirt werden muß, um das abzuschneidende Stück S zu erhalten. Die Seite CX im Dreyecke CXL wird gleichfalls nach (§. 115.) berechnet.

§. 127.

Ich habe bisher nur gezeigt, wie von einem Vielecke ein gegebenes Stück, unter den drey vornehmsten Bedingungen, abgeschnitten werden könne; und zum Theil braucht man auch nicht mehr zu wissen, um ein Vieleck, unter eben diesen Bedingungen, in mehrere, gleiche oder ungleiche, Theile zu theilen, so fern man nur auf folgende zwey Lehrsätze beständig zurücksieht:

1) Daß man nicht jeden Theil besonders, sondern immer nur die Summe aller erstern Theile nach der Ordnung abschneidet;

2) daß man das zu theilende Vieleck, immer nur mit Rücksicht auf die jedesmalige Bedingung, vorläufig in Dreyecke oder Trapezen zerlegt, damit dieselben auf gewisse Art mit dem abzuschneidenden Stücke, der Lage nach übereinstimmen.

Diesem letztern Lehrsatze zufolge hat man schon bey Auflösung jeder der letztern Aufgaben eine andere Zerlegung des zu theilenden Vieleckes zum Grunde gelegt. Auf die schickliche Anwendung dieses Lehrsatzes kömmt es vornehmlich da an, wo die Theilungslinien alle, nach einer vierten Bedingung, aus eigenen, auf einer Seite des Umfanges gegebenen Punkten auslaufen sollen.

§. 128.

§. 128.

Kann man durch eine leichte vorläufige Rechnung, oder jene gewöhnliche, welche auf unmittelbarer Messung einiger Linien auf dem Papier beruhet, erfahren, zwischen welchen Constructionslinien die jedesmalige Theilungslinie zu liegen komme, und die einzelnen Theile fallen als Trapezoiden aus, so mag man dann auch nach der Formel (§. 120.) arbeiten; wie man an dem nur genannten Orte auch umgekehrt hätte verfahren, und die Theilung auf das Abschneiden eines Dreyeckes (§. 115.) gründen können, was bey Auflösung der letztern zwey Aufgaben geschehen ist.

Anwendung auf die Verwandlung der gebrochenen Gränzlinien in gerade.

§. 129.

Die große Nutzbarkeit der hieher gehörigen Aufgaben kann niemand bezweifeln, der die Unbequemlichkeiten kennt, die aus unnöthiger Anhäufung der Gränzzeichen, und aus den unzähligen Wendungen der Gränzlinie zu entstehen pflegen. Der ältere Tobias Mayer hat schon längst, mit sehr vielem Scharfsinne, diese Aufgaben durch Zeichnung aufgelöset, und damit den Feldmessern gezeigt, wie sie den, aus den vielen Brechungen der Gränzlinie entspringenden Uebeln, auf Verlangen der Eigenthümer, leicht abhelfen könnten. Da es nützlich, und im Falle, wo die zu findenden geraden Gränzlinien eben so richtig, nach ihren Längen und Neigungen, bestimmt werden sollen,

len, als die durch unmittelbare Messung und trigonometrische Rechnung schon gefundenen es sind, auch nothwendig seyn dürfte, von eben diesen Aufgaben eine trigonometrische Auflösung in Bereitschaft zu haben; so will ich hier diejenige, die sich aus einigen, bey Berechnung des Inhaltes der Vierecke, gebrauchten Formeln ganz ungekünstelt ableiten läßt, dem wißbegierigen Leser mittheilen.

§. 130.

Aufgabe. Es sey (Fig. 28.) BCDE eine gebrochene Gränzlinie: man soll dieselbe, ohne Nachtheil des Inhaltes der Figur, in eine gerade verwandeln.

Auflösung. Man ziehe aus B durch CD eine gerade Linie, welche die derselben zunächst liegende Gränzlinie DE in Ω schneidet. Soll die gezogene Linie BΩ die zu suchende gerade Gränzlinie seyn, so müssen die Dreyecke ΩOD, BOC, deren algebraische Summe den Inhalt des verschobenen Viereckes ΩBCD ausmacht, einander vollkommen gleich seyn. Nimmt man in diesem Vierecke, wie bisher immer geschehen ist, den hohlen Winkel BCD = C, den erhabenen CDΩ = D, die Seite BC = b, CD = c, DΩ = d, und den Inhalt = S an, so wird (§. 90.)

$$S = \frac{1}{2} c (d \sin. D + b \sin. C) - \frac{1}{2} bd \sin. (C + D).$$

Nun soll, nach der Bedingung der Aufgabe, S oder der Dreyecke ΩOD, BOC algebraische Summe = o seyn; daher wird

$$cd\ \sin. D + bc\ \sin. C = bd\ \sin. (C + D),$$ und

$$d = \frac{bc\ \sin. C}{b\ \sin.(C + D) - c\ \sin. D} = \frac{b\ \sin. C : \sin. D}{b\ \sin.(C + D) : c\ \sin. D - 1}.$$

Z. B. Es sey $b = 170$; $c = 432$; $C = 114^\circ\ 23'$; $D = 236^\circ\ 43'$, und d soll gesuchet werden.

$$\log. \sin. C = 9{,}9594248$$
$$\log. b = 2{,}2304489$$
$$12{,}1898737 - 10$$
$$\log. \sin. D = 9{,}9221891 - 10$$
$$2{,}2676846 = \log. 185{,}2.$$

$$l. \sin. (C + D) = 9{,}1895195 \qquad l. \sin. D = 9{,}9221891$$
$$\log. b = 2{,}2304489 \qquad \log. c = 2{,}6354837$$
$$11{,}4199684 - 10 \qquad 12{,}5576728 - 10$$
$$12{,}5576728 - 10$$
$$\log. 0{,}07283 = 0{,}8622956 - 2 \qquad 1{,}00000$$
$$\log. 185{,}2 = 2{,}2676846 \qquad 0{,}07283$$
$$\log. 0{,}92717 = 0{,}9671594 - 1 \qquad 0{,}92717$$
$$2{,}3005252 = \log. 199{,}8$$
$$d = 199{,}8.$$

§. 131.

§. 131.

Ereignet es sich, daß die aus B durch CD gezogene Linie nicht in DE einschneidet, so ist die Auflösung dieser Aufgabe aus dem Punkte B unmöglich, und man muß sie aus einem andern versuchen.

§. 132.

Aufgabe. Es ist in der Linie DE der Punkt Ω gegeben, wo die gerade Gränzlinie BΩ einschneidet, man soll, unter dieser und den vorigen Bedingungen, den Winkel DΩB finden, unter welchem beyde Linien sich schneiden.

Auflösung. Es war (§. 92.)

$$S = \frac{-d \sin.(B+C+D)}{2 \sin. B} (c \sin. C - d \sin. (C+D))$$

$$+ \tfrac{1}{2} bc \sin. C.$$

Daher ist, wegen S = o, hier

$$\frac{d \sin.(B+C+D)}{\sin. B} (c \sin. C - d \sin. (C+D))$$

$$= bc \sin. C,$$ folglich

$$d(\cot. B + \cot.(C+D))(c \sin. C - d \sin.(C+D))$$

$$= \frac{bc \sin. C}{\sin. (C+D)};$$ also

$$\cot. B = \frac{bc \sin. C : \sin. (C+D)}{d(c \sin. C - d \sin. (C+D))} - \cot. (C+D)$$

$$= \frac{bc \sin. C : d^2 \sin. (C+D)^2}{c \sin. C : d \sin. (C+D) - 1} - \cot. (C+D).$$

Hat

Hat man auf diese Weise B gefunden, so erhält man dann durch eine sehr leichte Rechnung

$\Omega = B + C + D - 4R.$ *)

Daher ist $\Omega + 2R$ der Winkel, welchen die gerade Gränzlinie $B\Omega$ mit ΩE in Ω macht.

Z. B. Es sey $b = 170$; $c = 432$; $d = 199,8$; $C = 114^\circ\, 23'$; $D = 236^\circ\, 43'$, und Ω soll gesuchet werden.

l.sin.C = 9,9594248
log. b = 2,2304489 | 2 log. d = 4,6010504
log. c = 2,6354837 | 2 l.sin.(C+D) = 18,3790390
14,8253574 − 10 | 22,9800894 − 20
22,9800894 − 20
1,8452680 = log. 70,03.

lg.sin.C = 9,9594248 | lg.sin.(C + D) = 9,1895195
log. c = 2,6354837 | log. d = 2,3005252
12,5949085 − 10 | 11,4900447 − 10
11,4900447 − 10
1,1048638 = log. 12,73
1
− 1,1376705 = log. 13,73
1,8452680 = log. 70,03
0,7075975 = log. 5,100

cot.

*) Es sind nämlich in dem verschobenen Vierecke die vier Winkel zusammen nur in so fern 4 R gleich, als der Winkel Ω negativ genommen wird.

$$\cot.\ (C + D) = \underline{6{,}3858665}$$

$$1{,}2858665 = \cot.\ 37^\circ\ 53'$$

$$B = 37^\circ\ 53;$$

$$\Omega = 28^\circ\ 59'.$$

§. 133.

Aufgabe. Es sind von der gebrochenen Gränzlinie BCDΩ die Theile b, c, d, und die Winkel B, D gegeben: die gerade Gränzlinie BΩ = ω zu finden.

Auflösung. Es war (§. 93.)

$$S = \tfrac{1}{2}(\omega b\ \sin.\ B + cd\ \sin.\ D).$$

Daher ist hier, S = o angenommen,

$$\omega b\ \sin.\ B = - cd\ \sin.\ D, \text{ und}$$

$$\omega = \frac{- cd\ \sin.\ D}{b\ \sin.\ B}.$$

Z. B. Es sey $b = 170$; $c = 432$; $d = 199{,}8$; $B = 37^\circ\ 53'$; $D = 236^\circ\ 43'$, und ω soll gesuchet werden.

log. sin. D = 9,9221891	
log. c = 2,6354837	log. sin. B = 9,7882077
log. d = 2,3005252	log. b = 2,2304489
14,8581980 − 10	12,0186566 − 10
12,0186566 − 10	
2,8395414 = log. 691,1;	

$$\omega = 691{,}1.$$

§. 134.

Mit Hilfe dieser drey Aufgaben wird nicht nur eine zweymal gebrochene Gränzlinie in eine gerade verwandelt, sondern auch, wenn mit einer mehrmal gebrochenen diese Verwandelung vorgenommen werden soll, zur Fortsetzung der Arbeit der Weg gebahnet. Die Weise dieser Fortsetzung brauche ich die nicht erst zu lehren, welche sich mit der Methode des sel. Tob. Mayers aus seines Sohnes Schriften schon näher bekannt gemacht haben, und die andern muß ich, weil sie dem Feldmesser beynahe unentbehrlich sind, ohne dieß dahin weisen.

Polygonometrie.

Die vornehmsten polygonometrischen Formeln.

§. 135.

Wie unter den dreyen zu bestimmenden Stücken eines Dreyeckes wenigst eine Seite, so muß unter den drey unbekannten Stücken eines Vieleckes wenigst ein Winkel seyn. Denn sind in einem Vielecke alle äußern Winkel, auch alle Seiten, drey ausgenommen, bekannt, so ist es, was sich auch ohne Beweis einsehen läßt, noch nicht ganz bestimmt, und muß zur vollen Bestimmung die Zahl der bekannten Seiten noch um eine vermehrt werden. Die drey unbekannten Stücke sind daher entweder

1) zwey Seiten und ein Winkel, oder

2) eine Seite und zwey Winkel, oder

3) drey Winkel.

§. 136.

In jedem dieser drey Fälle läßt sich eines von den drey unbekannten Stücken mit den bekannten durch eine Gleichung verbinden, und die aus derselben jedesmal wegbleibenden sind entweder

1) eine Seite und ein Winkel, oder

2) zwey Winkel.

§. 137.

Unter jeder Voraussetzung kann das in der Gleichung enthaltene unbekannte Stück entweder eine Seite, oder ein Winkel seyn. Und daher sind, diese unbekannten Stücke zu finden, vier Gleichungen erforderlich:

1) Worin das unbekannte Stück eine Seite ist, und woraus zwey Winkel wegbleiben;

2) worin das unbekannte Stück ein Winkel ist, und woraus zwey Winkel wegbleiben;

3) worin das unbekannte Stück eine Seite ist, und woraus eine Seite und ein Winkel wegbleiben;

4) worin das unbekannte Stück ein Winkel ist, und woraus eine Seite und ein Winkel wegbleiben.

§. 138.

Jede dieser vier Gleichungen wird, in Hinsicht auf die Lage der unbekannten Stücke, wieder verschiedene Fälle enthalten. Denn es können die unbekannten Stücke zusammen liegen, und aus einander. Da der erste und einfachste Hauptfall zu unserer Absicht hinreichet, so werden wir uns mit dessen Untersuchung begnügen, und auf die Erfindung der erwähnten vier Gleichungen allein, ohne andere daraus abzuleiten, unsere Bemühungen einschränken.

§. 139.

Aufgabe. Es sind in einem Vielecke zwey Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel unbekannt: man soll die Verbindung der einen unbekannten Seite mit den bekannten Seiten und Winkeln durch eine Gleichung ausdrücken.

Auflösung. Es sey (Fig. 6.) ABCDEF ein Sechseck, die Seiten AF, EF, und der von selben eingeschlossene Winkel F die unbekannten Stücke desselben, und die Seite EF insbesondere das, was gesuchet werden soll. Diesen Bedingungen allen leistet die oben (§. 32.) gefundene erste Grundgleichung vollkommenes Genügen; es ist daher, unter den daselbst angenommenen Bezeichnungen der Seiten und Winkel:

$$a \sin. A + b \sin. (A + B) + c \sin. (A + B + C) + d \sin. (A + B + C + D) + e \sin. (A + B + C + D + E) = 0.$$

Da

Da in dieser Gleichung alle Winkel, auch alle Seiten, e ausgenommen, bekannt sind, so läßt sich dieselbe leicht finden.

§. 140.

Aufgabe. Es sind in einem Vielecke eine Seite nebst den zwey anliegenden Winkeln unbekannt: man soll die Verbindung der unbekannten Seite mit den bekannten Seiten und Winkeln durch eine Gleichung ausdrücken.

Auflös. Es sey (Fig. 6.) in dem Sechsecke ABCDEF die Seite AF nebst den anliegenden Winkeln A und F unbekannt, und f solle gesuchet werden. Nach (§. 32.) ist

$$a \sin. A + b \sin. (A + B) + c \sin. (A + B + C) + d \sin. (A + B + C + D) + e \sin. (A + B + C + D + E) = 0,$$ und

$$a \cos. A + b \cos. (A + B) + c \cos. (A + B + C) + d \cos. (A + B + C + D) + e \cos. (A + B + C + D + E) = - f.$$

Man quadrire diese beyden Gleichungen, und addire die Quadrate, so erhält man, nach den gemachten Reductionen:

$$\begin{aligned} f^2 = {} & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \\ & + 2ab \cos. B + 2ac \cos. (B + C) + 2ad \cos. (B + C + D) + 2ae \cos. (B + C + D + E) \\ & + 2bc \cos. C + 2bd \cos. (C + D) + 2be \cos. (C + D + E) \\ & + 2cd \cos. D + 2ce \cos. (D + E) \\ & + 2de \cos. E. \end{aligned}$$

§. 241.

§. 141.

Aufgabe. Es sind in einem Vielecke drey auf einander folgende Winkel unbekannt: man soll die Verbindung des mittlern derselben mit den bekannten Seiten, und übrigen bekannten Winkeln durch eine Gleichung ausdrücken.

Auflös. Es seyen (Fig. 6.) im Sechsecke ABCDEF die Winkel A, F, E unbekannt, und F solle gesuchet werden. Da (§. 28.)

$$A + B + C + D + E = (m + 1)\, 4R - F,$$

so ist auch (§. 11.)

$$\text{sin.}(A + B + C + D + E) = \text{sin.}((m + 1)\, 4R - F)$$
$$= \text{sin.}(4R - F) = - \text{sin.}\, F.$$

Aus den nämlichen Gründen, und weil $F > 2R$, erhält man $\text{cos.}(A + B + C + D + E) = - \text{cos.}\, F$. Daher verwandeln sich die beyden Grundgleichungen in diese:

$$a\, \text{sin.}\, A + b\, \text{sin.}(A + B) + c\, \text{sin.}(A + B + C)$$
$$+ d\, \text{sin.}(A + B + C + D) = e\, \text{sin.}\, F,$$ und

$$a\, \text{cos.}\, A + b\, \text{cos.}(A + B) + c\, \text{cos.}(A + B + C)$$
$$+ d\, \text{cos.}(A + B + C + D) = e\, \text{cos.}\, F - f.$$

Man quadrire diese Gleichungen, addire die Quadrate, und reducire die Summen, so ergiebt sich:

$$- \text{cos.}\, F = \left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2 \\ + 2\,ab\, \text{cos.}\, B + 2\,ac\, \text{cos.}(B + C) \\ + 2\,ad\, \text{cos.}(B + C + D) \\ + 2\,bc\, \text{cos.}\, C + 2\,bd\, \text{cos.}(C + D) \\ + 2\,cd\, \text{cos.}\, D. \end{array}\right\} : 2\,ef$$

§. 142.

Aufgabe. Es sind in einem Vielecke eine Seite nebst den zwey anliegenden Winkeln unbekannt: man soll die Verbindung zwischen dem einen unbekannten Winkel, und den bekannten Winkeln und Seiten durch eine Gleichung ausdrücken.

Auflösung. Es seyen (Fig. 6.) im Sechsecke ABCDEF die Seite AF, und die ihr anliegenden Winkel A, F unbekannt, und A solle gesuchet werden. Man substituire in der ersten Grundgleichung für sin. (A + B); sin. (A + B + C) u. s. w. den Sinus der Summe zweyer Winkel A und B; A und B + C u. s. w., und nehme die gehörigen Reductionen vor, so wird

$$\text{tang. } A = -\left\{\begin{matrix} + b \sin. B \\ + c \sin.(B + C) \\ + d \sin.(B + C \\ + D) \\ + e \sin.(B + C \\ + D + E) \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} + a + b \cos. B \\ + c \cos.(B + C) \\ + d \cos.(B + C \\ + D) \\ + e \cos.(B + C \\ + D + E). \end{matrix}\right.$$

§. 143.

Ich habe dem Leser den Weg, auf welchem diese letztern drey Formeln erfunden worden, zwar nicht vorgezeichnet, aber doch so deutlich gewiesen, daß er ihn unmöglich verfehlen kann. Und die mehrere Mühe, die er sich etwa geben muß, wird ihm durch das erhabene, geistige Vergnügen, bey dem plötzlichen Anschauen der Wahrheit, wieder reichlich vergolten werden.

Anwendung auf die Messung sehr großer Weiten.

§. 144.

Aufgabe. Man soll die Entfernung zweyer Oerter (Fig. 29.) A und F finden, wenn dieselbe so groß ist, daß man sie nicht wohl aus einer einzigen Standlinie bestimmen, auch von A nach F nicht hinsehen kann.

Auflösung. Man hänge die Oerter A und F durch schicklich gewählte Standlinien zusammen, so daß diese mit der zu messenden AF eine verschobene Figur ABCDEF bilden; messe die Linien AB, BC, CD, DE, EF auf mittelbare oder unmittelbare Weise, nebst den eingeschlossenen Winkeln B, C, D, E, und verwandle diese in Hinsicht der erwähnten Figur in äußere, so ist, nach den (§. 140.) angenommenen Benennungen:

$$\begin{aligned}
AF^2 = {} & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \\
& + 2ab \operatorname{cos.} B + 2ac \operatorname{cos.}(B+C) + 2ad \\
& \quad \operatorname{cos.}(B+C+D) + 2ae \operatorname{cos.}(B+C \\
& \quad + D + E) \\
& + 2bc \operatorname{cos.} C + 2bd \operatorname{cos.}(C+D) + 2be \\
& \quad \operatorname{cos.}(C+D+E) \\
& + 2cd \operatorname{cos.} D + 2ce \operatorname{cos.}(D+E) \\
& + 2de \operatorname{cos.} E.
\end{aligned}$$

Z. B. Es sey $a = 410$; $b = 251$; $c = 83$; $d = 321$; $e = 171$; $B = 91^\circ\ 55'$; $C = 74^\circ\ 36$;

D

$D = 233^\circ\ 41'$; $E = 306^\circ\ 48'$, und AF solle gesuchet werden.

$\cos. B = \cos. 91^\circ\ 55' = - \cos. 88^\circ\ 5'$

$\cos. (B + C) = \cos. 166^\circ\ 31' = - \cos. 13^\circ\ 29'$

$\cos. (B + C + D) = \cos. 400^\circ\ 12' = + \cos. 40^\circ\ 12'$

$\cos. (B + C + D + E) = \cos. 707^\circ = + \cos. 13^\circ$

$\cos. C = + \cos. 74^\circ\ 36'$

$\cos. (C + D) = \cos. 308^\circ\ 17' = + \cos. 51^\circ\ 43'$

$\cos. (C + D + E) = \cos. 615^\circ\ 5' = - \cos. 75^\circ\ 5'$

$\cos. D = \cos. 233^\circ\ 41' = - \cos. 53^\circ\ 41'$

$\cos. (D + E) = \cos. 540^\circ\ 29' = - \cos. 0^\circ\ 29'$

$\cos. E = \cos. 306^\circ\ 48 = + \cos. 53^\circ\ 12'$

Wird nach dieser Vorarbeit auf gewöhnliche Weise verfahren, so erhält man

$$\begin{aligned} AF^2 = {} & 168100 + 63001 + 6889 + 103041 \\ & + 29241 \\ & - 6883{,}8 - 66184{,}1 + 201046{,}4 + 136626{,}1 \\ & + 11064{,}7 + 99835{,}6 - 22096{,}9 \\ & - 31558{,}5 - 28385 \\ & + 65762 \\ & = 729498{,}5; \end{aligned}$$

$AF = 854{,}1.$

§. 145.

Es ist bey dieser Auflösung ganz gleichgültig, ob die Standlinien in die zu findende Linie AF einschneiden, oder nicht; nur muß man jene so wählen, daß die Winkel, welche sie unter einander machen, weder zu spitz, noch zu stumpf ausfallen, und von der Richtigkeit ihrer Messung sich, so viel möglich ist, zu versichern suchen. Die hier angenommene Voraussetzung, daß die Winkel bey A und F nicht gemessen werden können, erschweret nicht nur die Prüfung der übrigen, welche in Rechnung kommen, sondern macht sie auch ohne andere gemessene Hilfswinkel schlechthin unmöglich. Diese Hilfswinkel ergeben sich, wenn man je zwey und zwey nächste Standlinien durch eine dritte zu einem Dreyecke verbindet. — Nur die Messung dieser Hilfswinkel macht die Prüfung der Hauptwinkel möglich.

§. 146.

Aufgabe. Man soll die Entfernung zweyer Oerter (Fig. 29.) A und F finden, die zwar, wegen ihrer Größe, sich nicht aus einer einzigen Standlinie messen, aber doch ganz übersehen läßt.

Auflösung. Man verfahre ganz so, wie (§. 144.) gelehrt worden, und messe noch überdieß die Winkel BAF und AFE, und prüfe und verbessere diese und die übrigen Winkel auf die jedem Feldmesser bekannte Weise, so läßt sich dann (§. 32.) mit sehr vieler Zuverläßigkeit schließen:

$$AF = -a \cos. A - b \cos.(A+B) - c \cos.(A+B+C) - d \cos.(A+B+C+D) - e \cos.(A+B+C+D+E).$$

z. B. Es sey $a = 410$; $b = 251$; $c = 83$; $d = 321$; $e = 171$; $A = 149^\circ\ 5'$; $B = 91^\circ\ 55'$; $C = 74^\circ\ 36'$; $D = 233^\circ\ 41'$; $E = 306^\circ\ 48'$, und AF solle gesuchet werden.

$$\cos. A = \cos.\ 149^\circ\ 5' = -\cos.\ 30^\circ\ 55'$$
$$\cos.(A + B) = \cos.\ 241^\circ = -\cos.\ 61'$$
$$\cos.(A + B + C) = \cos.\ 325^\circ\ 36' = +\cos.\ 44^\circ\ 24'$$
$$\cos.(A + B + C + D) = \cos.\ 549^\circ\ 17' = -\cos.\ 9^\circ\ 17'$$
$$\cos.(A + B + C + D + E) = \cos.\ 856^\circ\ 5' = -\cos.\ 43^\circ\ 55'.$$

$$AF = -351{,}8 - 121{,}7 + 59{,}3 - 316{,}8 - 123{,}2 = 913{,}5 + 59{,}3 = 854{,}2.$$

§. 147.

Aufgabe. Es sind zwey Oerter (Fig. 29.) A und F so weit von einander entfernt, daß man von einem zum andern hin nicht sehen kann: man soll die Richtung der Linie AF finden, welche die Entfernung beyder mißt.

Auflösung. Man hänge die Oerter A und F wieder durch schicklich gewählte Standlinien AB, BC, CD, DE und EF zusammen, und messe diese, und die von selben eingeschlossenen Winkel B, C, D und E, so ist (§. 142.), weil der Winkel A die Richtung der Linie AF bestimmt,

tang.

$$\text{tang. } A = -\left\{\begin{array}{l} + b \text{ sin. } B \\ + c \text{ sin.}(B + C) \\ + d \text{ sin.}(B + C \\ \quad + D) \\ + e \text{ sin.}(B + C \\ \quad + D + E) \end{array}\right. : \left\{\begin{array}{l} + a + b \text{ cos. } B \\ \quad + c \text{ cos.}(B + C) \\ \quad + d \text{ cos.}(B + C \\ \qquad + D) \\ \quad + e \text{ cos.}(B + C \\ \qquad + D + E) \end{array}\right.$$

Z. B. Es sey $a = 410$; $b = 251$; $c = 83$; $d = 321$; $e = 171$; $B = 91^\circ\ 55'$; $C = 74^\circ\ 36'$; $D = 233^\circ\ 41'$; $E = 306^\circ\ 48'$, und A solle gesuchet werden.

$\text{sin. } B = \text{sin. } 91^\circ\ 55' = + \text{sin. } 88^\circ\ 5'$; $\text{cos. } B = - \text{cos. } 88^\circ\ 5'$

$\text{sin. } (B + C) = \text{sin. } 166^\circ\ 31' = + \text{sin. } 13^\circ\ 29'$; $\text{cos. } (B + C) = - \text{cos. } 13^\circ\ 29'$

$\text{sin. } (B + C + D) = \text{sin. } 400^\circ\ 12' = + \text{sin. } 40^\circ\ 12'$; $\text{cos. } (B + C + D) = + \text{cos. } 40^\circ\ 12'$

$\text{sin. } (B + C + D + E) = \text{sin. } 707^\circ = - \text{sin. } 13^\circ$; $\text{cos. } (B + C + D + E) = + \text{cos. } 13^\circ$

$$\text{tang. } A = \frac{-250{,}87 - 19{,}35 - 207{,}19 + 38{,}47}{410 - 8{,}39 - 80{,}71 + 245{,}18 + 166{,}62}$$

$$= \frac{-438{,}94}{732{,}7} = -0{,}599072$$

$$= \text{tang. } 149^\circ\ 5';$$

$$A = 149^\circ\ 5'.$$

§. 148.

Diese Aufgabe, welche mehr in Ansehung der gebrauchten Auflösungsart, als für sich selbst, mit den beyden vorigen einige Aehnlichkeit hat, scheint hier nicht ganz an ihrem Orte zu stehen: allein weil sie theils zur leichtern Messung großer unübersehbarer Weiten vorbereitet, theils auch derselben Richtung bestimmt, so mag man ihr immer diesen Platz gönnen. — Sie ist besonders da vortheilhaft zu gebrauchen, wo von einem Orte zum andern, der aus dem ersten nicht sichtbar ist, Strassen angelegt, oder Alleen durch eine Waldung gehauen werden sollen.

Anwendung auf den genauen Auftrag des Netzes der Standlinien.

§. 149.

Die nächst vorhergehenden Aufgaben, aber noch weit mehr die, welche gleich folgen soll, sind bey Landesvermessungen ungemein brauchbar. — Nachdem an jeder Standlinie die nöthigen Winkel gemessen, und verbessert, und aus diesen, und einer gemessenen Standlinie die übrigen alle berechnet worden, zu welchem Ende ein ohngefährer Entwurf von der Lage aller dieser Linien (Netz) schon vorläufig mußte verfertiget worden seyn, wird endlich das berechnete Netz mit aller möglichen Genauigkeit aufgetragen. Man hat sich hiezu immer nur der Trigonometrie bedient; und in so fern der Auftrag nur vermittelst berechneter Abscissen und Ordinaten geschah, war gegen die Richtigkeit dieser Methode auch gar nichts einzuwenden:

den: allein weil die zur Berechnung dieser Abscissen und Ordinaten nöthigen Winkel, und die Positivität oder Negativität der Theile dieser Linien nur aus Betrachtung der Figur gefolgert werden konnten, war die Ausübung dieser Methode noch ziemlich mühesam, und mit Zeitverlust verbunden.

§. 150.

Der berühmte Herr Hofrath und Professor J. T. Mayer hob diese Unbequemlichkeit, indem er die trigonometrische Methode auf allgemeinere Formeln brachte, mit sehr gutem Erfolge. Nach denselben, was auch in der Polygonometrie geschieht, kann jeder in Rechnung kommende Winkel, ohne den nächstvorhergehenden nöthig zu haben, unmittelbar bestimmt werden. Allein das nebenher gebrauchte Mittel, die Lage der Abscissen und Ordinaten zu beurtheilen, und zu entscheiden, ob die Theile, um dieselben zu erhalten, addirt oder subtrahirt werden müssen, ist weniger einfach, etwas schwerer, und irrsamer in der Ausübung, als das ist, dessen man sich in der Polygonometrie bedient, wo die Beschaffenheit der ganzen Abscissen und Ordinaten, und ihrer Theile mit der Natur goniometrischer Linien inniger verwebt ist, und von selben ganz allein ihre Bestimmung erhält. — Das Vorzügliche der polygonometrischen Methode vor der trigonometrischen scheint außer Zweifel zu seyn.

§. 151.

Aufgabe. Es sind von dem Netze einiger Standlinien alle Seiten und Winkel bekannt: man soll dasselbe mit voller Genauigkeit auftragen.

Auf-

Auflösung. Es sey (Fig. 30.) ABCDEF der rohe Entwurf des Netzes, das völlig genau aufgetragen werden soll. Man beurtheile aus der Reihenfolge der Dreyecke, durch welche Standlinien die Oerter A, B, C, D, E, F zusammen gehängt werden müssen, daß eine gebrochene Linie ABCDEF entstehe, und dann, wie man die Winkel der Dreyecke, um nach der Ordnung die Winkel ABC, BCD, CDE, DEF zu erhalten, zusammenrechnen müsse. Nun ziehe man durch die Punkte A, F, welche durch keine Standlinie zusammenhangen, die Linie AF, so entsteht das verschobene Vieleck ABCDEF, in welchem alle Seiten und Winkel, die Seite AF, und die ihr anliegenden Winkel ausgenommen, bekannt sind. Man verwandle ferner die schon bekannten innern Winkel des erhaltenen Vieleckes in äußere, und suche daraus, und aus den sie einschließenden Seiten (§. 142.) den äußern Winkel A. Endlich bestimme man nach den beyden Grundgleichungen (§. 32.) die mit den Punkten B, C, D, E auf der Linie AF zusammengehörigen Abscissen und Ordinaten, oder, was man sie füglicher heißen könnte, Längen und Breiten. Wenn daher Ab, Ac, Ad, Ae die Längen, und Bb, Cc, Dd, Ee die Breiten der Punkte B, C, D, E bezeichnen, so ist

$$Ab = a\ \text{sin.}\ A;\quad Bb = a\ \text{cos.}\ A$$

$$Ac = a\ \text{sin.}\ A + b\ \text{sin.}(A + B);\quad Cc = a\ \text{cos.}\ A + b\ \text{cos.}(A + B)$$

$$Ad = a\ \text{sin.}\ A + b\ \text{sin.}(A + B) + c\ \text{sin.}(A + B + C);\quad Dd = a\ \text{cos.}\ A + b\ \text{cos.}(A + B) + c\ \text{cos.}(A + B + C)\ \text{u. s. w.}$$

Z. B. Es sey $a = 410$; $b = 251$; $c = 83$; $d = 321$; $e = 171$; $B = 91° 55'$; $C = 74° 36'$; $D = 233° 41'$; $E = 306° 48'$.

tang. A = − 0,599072 = tang. 149° 5′.

cos. A = − cos. 30° 55′

cos. (A + B) = − cos. 61°

cos. (A + B + C) = + cos. 44° 24′

cos. (A + B + C + D) = − cos. 9° 17′

cos. (A + B + C + D + E) = − cos. 43° 55′.

sin. A = + sin. 30° 55′

sin. (A + B) = − sin. 61°

sin. (A + B + C) = − sin. 44° 24′

sin. (A + B + C + D) = − sin. 9° 17′

sin. (A + B + C + D + E) = + sin. 43° 55′.

Ab = − 351,8

Ac = − 351,8 − 121,7 = − 473,5

Ad = − 351,8 − 121,7 + 59,3 = − 414,2

Ae = − 351,8 − 121,7 + 59,3 − 316,8 = − 731,0

AF = − 351,8 − 121,7 + 59,3 − 316,8 − 123,2 = − 854,2.

Bb = + 210,65

Cc = + 210,65 − 219,53 = − 8,88

Dd = + 210,65 − 219,53 − 58,07 = − 66,95

Ee = + 210,65 − 219,53 − 58,07 − 51,41 = − 118,36.

Wer-

Werden die nun gefundenen negativen Längen auf der Längenlinie AF vorwärts von A nach F, und die positiven Breiten darüber, die negativen darunter nach der Ordnung aufgetragen, so ist der fertige Auftrag der gezogenen Standlinien AB, BC, CD, DE, EF völlig genau, und eben so auch der der übrigen, welche zur Vollendung des Netzes noch gezogen werden müssen.

§. 152.

In diesem Beyspiele sind die Längen der Oerter alle negativ ausgefallen. Ereignet sich aber das Gegentheil, und eine oder die andere Länge fällt auch positiv aus, so müssen dieselben aus A auf der rückwärts verlängerten Längenlinie aufgetragen werden. Nach dieser Methode ist also, um entscheiden zu können, ob die berechneten Längen und Breiten vor- oder rückwärts, auf- oder abwärts getragen werden sollen, keine Betrachtung der Zeichnung, überhaupt gar keine Anstrengung der Einbildungskraft erforderlich. Man braucht auch nicht erst, um die Positivität oder Negativität eines Winkels zu erfahren, durch desselben Spitze mit der Längenlinie eine Parallele zu ziehen, sondern allein auf die Größe jedes Winkels A oder A + B, oder A + B + C u. s. w. Acht zu haben, oder wenn einer > 4 R ist, auf den Rest, welcher nach weggeworfenen so vielmal 4 R, als angeht, übrig bleibt. Kurz: die Größe des Winkels bestimmt (§. 11.) ganz allein die Positivität oder Negativität der Länge- und Breitetheile, wie der ganzen Längen und Breiten.

§. 153.

Es ist aber nicht nothwendig, daß die Längenlinie, wie bisher angenommen worden, selbst eine Seite der Figur sey; man kann jede andere durch A gezogene Linie, wenn man zugleich, um wieder eine geschlossene Figur zu erhalten, die gegebenen Oerter durch andere Standlinien verbindet, zur Längenlinie annehmen. Obschon es im Grunde gleichgültig ist, welchen Winkel mit AB die Längenlinie mache, pflegt man dennoch, einiger Vortheile wegen, denselben gewöhnlich so anzunehmen, daß die Längenlinie zugleich eine Mittagslinie sey, und leitet zu dem Ende diesen Winkel aus Beobachtungen ab. Wie eine Lage der Längenlinie etwas vortheilhafter, als die andere ist, so gewähret auch ein Ort, durch welchen die Längenlinie gehen, oder von dem der Auftrag anfangen soll, vor dem andern einige Vortheile. Dieser Vortheile sich zu versichern, legt man die Längenlinie durch einen Ort, dergleichen hier C ist, welcher ohngefähr mitten in der Karte sich befindet. — Die Methode, unter der Voraussetzung, daß die Längenlinie eine Mittagslinie sey, die Längen und Breiten der Oerter zu berechnen, kann für den keine Beschwerniß mehr haben, welcher das, was wir bisher gesagt haben, vollkommen inne hat.

Anwendung auf die Berechnung des Inhaltes geradliniger Figuren.

§. 154.

Aufgabe. Es sind (Fig. 31.) in dem Vielecke ABCDE alle Seiten und Winkel, die Seite ED, und die ihr an-

liegen-

liegenden Winkel E und D ausgenommen, gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Man fälle aus B und C auf AE die Perpendikel Bb, Cc, und wieder aus B und D auf Cc die Perpendikel Bm, Dn, so ist der doppelte Inhalt des Vieleckes, oder

$$2S = 2ABb + 2BCm + 2CDn + 2Bbcm + 2DncE.$$

Es ist aber

$$Ab = -a\cos A \qquad Bb = +a\sin A$$
$$Bm = -b\cos(A+B) \qquad Cm = +b\sin(A+B)$$
$$Dn = -c\cos(A+B+C) \qquad Cn = -c\sin(A+B+C)$$

und ferner

$$Ec = e + a\cos A + b\cos(A+B)$$
$$nc = a\sin A + b\sin(A+B) + c\sin(A+B+C);$$

also

$$2ABb = -\tfrac{1}{2}a^2\sin 2A$$
$$2BCm = -\tfrac{1}{2}b^2\sin 2(A+B)$$
$$2CDn = +\tfrac{1}{2}c^2\sin 2(A+B+C)$$
$$2Bbcm = -2ab\sin A\cos(A+B)$$
$$2DncE = (-c\cos(A+B+C) + e + a\cos A + b\cos(A+B)) \times (a\sin A + b\sin(A+B) + c\sin(A+B+C));$$

folg-

folglich

$$2S = e(a \sin. A + b \sin.(A+B) + c \sin.(A+B+C)) + a(b \sin. B + c \sin.(B+C)) + b\,c \sin. C.$$

Das Gesetz, das in dieser Gleichung liegt, läßt sich schon durch bloßes Anschauen entdecken, und eben so leicht die dieser Gleichung für jede mehrseitige Figur zukommende Gestalt finden.

Z. B. Es sey (Fig. 19.) $a = 361$; $b = 383$; $c = 308$; $d = 400$; $e = 599$; $g = 531$, und $A = 66° 37'$; $B = 95° 16'$; $C = 269° 29'$; $D = 74° 5'$; $E = 88° 23'$, und S, der Inhalt der Figur, soll gefunden werden. — Da die gegebene Figur ein Siebeneck ist, so bekömmt die Formel folgende Gestalt:

$$2S = g(a \sin. A + b \sin.(A+B) + c \sin.(A+B+C) + d \sin.(A+B+C+D) + e \sin.(A+B+C+D+E)) + a(b \sin. B + c \sin.(B+C) + d \sin.(B+C+D) + e \sin.(B+C+D+E)) + b(c \sin. C + d \sin.(C+D) + e \sin.(C+D+E)) + c(d \sin. D + e \sin.(D+E)) + d\,e \sin. E.$$

Da

Da nun

$\sin. A = + \sin. 66^\circ 37'$ $\sin.(A+B = + \sin. 18^\circ 7'$

$\sin. B = + \sin. 84^\circ 44'$ $\sin.(B+C) = + \sin. 4^\circ 45'$

$\sin. C = - \sin. 89^\circ 29'$ $\sin.(C+D) = - \sin. 16^\circ 26'$

$\sin. D = + \sin. 74^\circ 5'$ $\sin.(D+E) = + \sin. 17^\circ 32'$

$\sin. E = + \sin. 88^\circ 23'$

$\sin.(A+B+C) = + \sin. 71^\circ 22'$

$\sin.(B+C+D) = + \sin. 78^\circ 50'$

$\sin.(C+D+E) = + \sin. 71^\circ 57'$

$\sin.(A+B+C+D) = + \sin. 34^\circ 33'$

$\sin.(B+C+D+E) = + \sin. 12' 47'$

$\sin.(A+B+C+D+E) = - \sin. 53^\circ 50'$, so ist

$2S = 175947,4 + 63239,4 + 154975,2 + 120457,7$
$- 256778,3$
$+ 137679,3 + 9207,3 + 141666,2 + 15130,3$
$- 117959,1 - 43340,2 + 218126,6$
$+ 118476,7 + 55580,1$
$+ 239504,7$; also

$2S = 1031913,3$ Q. F. und $S = 515956,6$ Q. F.
$= 12\frac{7}{8}$ Morgen 957 Q. F.

§. 155.

Aufgabe. Es sind (Fig. 31.) in dem Vielecke ABCDE alle Seiten und Winkel, die Seiten AE, ED, und den ein=

eingeschlossenen Winkel E ausgenommen, gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Es ist (§. 32.)

$$c \sin. D + b \sin.(D+C) + a \sin.(D+C+B)$$
$$+ e \sin.(D+C+B+A) = 0; \text{ also}$$

$$e = -\frac{c \sin. D + b \sin.(D+C) + a \sin.(D+C+B)}{\sin.(D+C+B+A)}$$

$$= -c\psi - \phi,$$

wenn man, der Kürze wegen, setzt

$$\psi = \frac{\sin. D}{\sin.(D+C+B+A)}, \text{ und}$$

$$\phi = \frac{b \sin.(D+C) + a \sin.(D+C+B)}{\sin.(D+C+B+A)}; \text{ folglich}$$

$$2S = (-c\psi - \phi)(a \sin. A + b \sin.(A+B) + c \sin.(A+B+C))$$
$$+ a(b \sin. B + c \sin.(B+C))$$
$$+ b\; c \sin. C.$$

In dieser Gleichung liegt ein doppeltes Gesetz, und eines wie das andere ist gleich leicht zu bemerken, auch schon aus dem, was bisher vorgetragen worden, bekannt.

Ich unterlasse den Gebrauch dieser Formel durch ein Zahlenbeyspiel zu erläutern, weil, nach einem Theile, ihre Bearbeitung nicht schwer, und, nach dem andern, schon (§. 154.) bekannt ist.

An-

Anwendung auf die Theilung geradliniger Figuren.

§. 156.

Aufgabe. Man soll (Fig. 20.) von dem Vielecke ABCDEFG, dessen alle Seiten und Winkel bekannt sind, ein gegebenes Stück S gegen den Scheitel E abschneiden, so daß die Theilungslinie mit einer durch E gelegten MN, welche mit EF einen gewissen Winkel = W macht, parallel laufe.

Auflösung. Man ziehe mit der gegeben Linie MN durch die Eckpunkte der Figur F, D, C u. s. w. die Linien Ff, Dd, Cc u. s. w. parallel; berechne auf die sonst gewöhnliche Weise die Inhalte der so entstandenen Drey- und Vierecke, und bringe dieselben je zwey, je drey u. s. w. in eine Summe, um zu sehen, zwischen welche Parallelen die Theilungslinie zu liegen kommen dürfte. — Es komme die Theilungslinie VX zwischen Dd und Cc zu liegen, so ist das abzuschneidende Stück VDEFX ein Fünfeck, in welchem, weil V = 2R — (D + E — W), alle Winkel und die Seiten DE, EF bekannt sind. Vergleicht man dieses mit dem, was wir eben (§. vor.) betrachtet haben, und nimmt an, es sey

dort	DE;	CD;	BC;	AB;	AE
hier	VX;	DV;	ED;	FE;	XF, und wieder
dort	D;	E;	A;	B;	C
hier	V;	X;	F;	E;	D, so ist

$$\psi = \frac{\sin. V}{\sin. (V + D + E + F)}, \text{ und}$$

$$\phi = \frac{d \sin. (V + D + e \sin. (V + D + E)}{\sin. (V + D + E + F)}; \text{ also}$$

$$2S = (-v\psi - \phi)(e \sin. F + d \sin. (F + E) + v \sin. (F + E + D))$$
$$+ e (d \sin. E + v \sin. (E + D))$$
$$+ d\, v \sin. D.$$

Setzt man ferner noch der mehrern Kürze wegen,

$$\alpha = e \sin. F + d \sin. (F + E)$$
$$\beta = \sin. (F + E + D)$$
$$\gamma = e d \sin. E$$
$$\delta = e \sin. (E + D) + d \sin. D, \text{ so ist}$$

$$2S = (-v\psi - \phi)(\alpha + v\beta) + \gamma + v\delta; \text{ also}$$

$$v = \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha\psi + \beta\phi - \delta}{2\beta\psi}\right)^2 + \frac{\gamma - \alpha\phi - 2S}{\beta\psi}} - \frac{\alpha\psi + \beta\phi - \delta}{2\beta\psi}$$

$$= \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2\beta} + \frac{\phi}{2\psi} - \frac{\delta}{2\beta\psi}\right)^2 + \frac{\gamma - \alpha\phi - 2S}{\beta\psi}}$$
$$- \left(\frac{\alpha}{2\beta} + \frac{\phi}{2\psi} - \frac{\delta}{2\beta\psi}\right).$$

Z. B.

Z. B. Es sey $d = 400$; $e = 599$, und $D = 74°$ $5'$; $E = 88° 23'$; $F = 67° 23'$; $W = 30°$; $V = 2R - (D + E - W) = 47° 32$; $S = 6$ M. $= 240000$ Q. F. und V soll gesuchet werden.

$\sin. D = + \sin. 74° 5'$

$\sin. (D + E) = + \sin. 17° 32'.$

$\sin. F = + \sin. 67° 23'$

$\sin. (F + E) = + \sin. 24° 14'$

$\sin. (F + E + D) = + \sin. 49° 51'.$

$\sin. V = + \sin. 47° 32'$

$\sin. (V + D) = + \sin. 58° 23'$

$\sin. (V + D + E) = - \sin. 30°$

$\sin. (V + D + E + F) = - \sin. 82° 37'.$

$\psi = - 0,74384$

$\phi = - 41,474$

$\alpha = + 717,12$

$\beta = - 0,764359$

$\gamma = + 239504,7$

$\delta = + 565,12$

$\frac{\alpha}{2\beta} = - 469,1$; $\frac{\phi}{2\psi} = + 27,878$; $\frac{\delta}{2\beta\psi} = 496,98$

$\frac{\alpha}{2\beta} + \frac{\phi}{2\psi} - \frac{\delta}{2\beta\psi} = - 938,202$

$\alpha\phi = -29741,74$; $2S = 480000$; $\beta\psi = +0,5685$

$$\frac{\gamma - \alpha\phi - 2S}{\beta\psi} = -370680,1$$

$$(938,202)^2 = 880222,9$$

$$880222,9 - 370680,1 = 509542,8$$

$$\sqrt{509542,8} = \pm 713,82$$

$$v = \pm 713,82 + 938,202 = 224,38.$$

§. 157.

Um mehr als ein Stück abzuschneiden, muß man vorerst die Seiten FX, VX vermittelst der beyden Grundgleichungen (§. 32.) berechnen, und dann, die zweyte Theilunglinie zu finden, wieder auf diese Weise verfahren. Und aus dem läßt sich schließen, wie unter gleichen Bedingungen auch drey, vier und mehrere Stücke von gegebener Größe nach der Ordnung abgeschnitten werden mögen. Ich habe für dieses Zahlenbeyspiel, um die Bearbeitung zu erleichtern, nur ein Fünfeck gewählt; für Stücke von mehrern Seiten fällt die Arbeit in eben dem Maaße weitläufiger aus, allein die Verfahrungsart bleibt die nämliche.

§. 158.

Aufgabe. Man soll (Fig. 26.) von dem Vielecke ABCDEFG, dessen alle Seiten und Winkel bekannt sind, ein gegebenes Stück S gegen den Scheitel A abschneiden, so daß die Theilungslinie in die Seite FG in einem bestimmten Punkte L einschneide.

Auf=

Auflösung. Man ziehe aus L nach A, B, C u. s. w. Linien, berechne auf die sonst gewöhnliche leichte Weise die Inhalte der so entstandenen Dreyecke, und bringe deren je zwey, je drey u. s. w. in eine Summe, um zu erfahren, zwischen welche Eckpunkte der Figur das andere Ende der Theilungslinie zu liegen komme. Es komme dasselbe zwischen B und C zu liegen, und LX sey die Theilungslinie, welche gesucht werden soll, so ist das abzuschneidende Stück ein Fünfeck. Vergleicht man dieses mit der (Fig. 31.), und nimmt an, es sey

dort DE; EA; AB; BC; CD
hier XL; LG; GA; AB; BX, und wieder
dort A; B; C
hier G; A; B, so ist

$$2S = l\,(g \sin. G + a \sin. (G + A) + x \sin. (G + A + B)) + g\,(a \sin. A + x \sin. (A + B)) + a\,x \sin. B;$$ also

$$x = \frac{2S - l\,(g \sin. G + a \sin. (G + A)) - g\,a \sin. A}{a \sin. B + g \sin. (A + B) + l \sin. (G + A + B)}$$

Z. B. Es sey $l = 250$; $g = 531$; $a = 361$; $G = 58° 47'$; $A = 66° 37'$; $B = 95° 16'$; $S = 5\frac{1}{2}$ M. = 220000 Q. F. und x soll gesuchet werden.

$\sin. A = + \sin. 66° 37'$
$\sin. G = + \sin. 58° 47'$
$\sin. (G + A) = + \sin. 54° 36'$

sin.

$\sin. B = + \sin. 84° 44'$

$\sin. (B + A) = + \sin. 18° 7'$

$\sin. (B + A + G) = - \sin. 40° 40'.$

$lg \sin. G = + 113530$

$la \sin. (G + A) = + 73565$

$ga \sin. A = + 175947,4$

$a \sin. B = + 359,47$

$g \sin. (B + A) = + 165,12$

$l \sin. (B + A + G) = - 162,91.$

$$x = \frac{440000 - 187095 - 175947,4}{359,47 + 165,12 - 162,91}$$

$$= 212,78.$$

§. 159.

Soll unter eben denselben Bedingungen noch ein zweytes Stück abgeschnitten werden, so muß man vorläufig (§. 142.) den Winkel L, und wieder (§. 32.) die Linie XL finden. Und diese Vorbereitungsarbeit muß man so oft wiederholen, als oft ein neues Stück abgeschnitten werden soll.

§. 160.

Aufgabe. Man soll (Fig. 27.) von dem Vielecke ABCDEFG ein gegebenes Stück S abschneiden, so daß die Theilungslinie durch einen innerhalb des Vieleckes gelegenen Punkt L, welchen die Linie AL und der Winkel BAL bestimmen, durchgehe.

Auf-

Auflösung. Vorausgesetzt, daß die gegebene Linie AL das abzuschneidende Stück begränzen dürfe oder solle, suche man auf die schon mehrmal erwähnte Weise, zwischen welche Eckpunkte der Figur das andere Ende der Theilungslinie fallen werde. Es falle zwischen C und D, und LX sey die Theilungslinie, so ist das abzuschneidende Stück LABCX ein Fünfeck, in welchem alle Seiten und Winkel, die zu findende Seite CX, und die Seite LX, und die ihr anliegenden Winkel, welche aus der Gleichung wegbleiben, ausgenommen, bekannt sind, und CX läßt sich aus eben der Gleichung finden, aus welcher wir (Fig. 26.) BX fanden.

§. 161.

Die vollkommene Aehnlichkeit dieser Aufgabe mit der vorigen gezeigt zu haben, mag hier genug seyn, und darum die Erläuterung durch ein Zahlenbeyspiel allerdings wegbleiben.

Anwendung auf die Verwandlung der gebrochenen Gränzlinien in gerade.

§. 162.

Aufgabe. Es sey (Fig. 32.) ABCDEF eine gebrochene Gränzlinie: man soll dieselbe, dem Inhalte der Figur unbeschadet, in eine gerade verwandeln.

Auflösung. Man suche durch eine vorläufige Zeichnung zu erfahren, in welche nahe oder entfernte Gränzlinie die zu suchende gerade beyläufig einschneide. Sie

schneide

schneide in EF ein, und sey $= A\Omega$, so ist $ABCDE\Omega$ ein Sechseck, in welchem alle Seiten und Winkel, die Seiten $A\Omega$, $E\Omega$, und Winkel A, Ω ausgenommen, bekannt sind, und daher (§. 154.)

$$\begin{aligned} 2S = \omega (e \sin. E + d \sin. (E + D) + c \sin. (E + D \\ + C) + b \sin. (E + D + C + B)) \\ + e (d \sin. D + c \sin. (D + C) + b \sin. (D \\ + C + B)) \\ + d (c \sin. C + b \sin. (C + B)) \\ + c\, b \sin. B = 0; \text{ also} \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{-e(d \sin. D + c \sin. (D + C) + b \sin. (D + C + B))}{e \sin. E + d \sin. (E + D) + c \sin. (E + D + C)}$$
$$\frac{-d (c \sin. C + b \sin. (C + B)) - c\, b \sin. B}{+ b \sin. (E + D + C + B)}.$$

Z. B. Es sey $b = 410$; $c = 251$; $d = 83$; $e = 321$, und $B = 91° 55'$; $C = 74° 36'$; $D = 233° 41'$; $E = 306' 48'$, und ω soll gesuchet werden.

$\sin. B = + \sin. 88° 5'$

$\sin. C = + \sin. 74° 36'$

$\sin. (C + B) = + \sin. 13° 29'$

$\sin. D = - \sin. 53° 41'$

$\sin. (D + C) = - \sin. 51° 43'$

$\sin. (D + C + B) = + \sin. 40° 12'$

$\sin. E = - \sin. 53° 12'$

$\sin. (E + D) = - \sin. 0° 29'$

$\sin. (E + D + C) = - \sin. 75° 5'$

$\sin. (E + D + C + B) = - \sin. 13° 0'$

$$\omega = \frac{21467{,}75 + 63244{,}74 - 84948{,}68 - 20085 - 7934{,}52 - 102852{,}4}{- 257{,}03 - 0{,}70 - 242{,}54 - 92{,}23}$$

$$= \frac{- 131108{,}11}{- 592{,}50} = 221{,}2.$$

§. 163.

Hat man die Seite ω gefunden, so läßt sich nun auch der Winkel A (§. 147.), und (§. 146.) auch die gerade Linie AΩ auf leichte Weise berechnen, welche beyde Stücke zur Wiederherstellung des Gränzregisters nothwendig sind.

§. 164.

Es ist aber nicht immer der Fall, daß S = o, oder der Figur ABCDEΩ Theile M und N, welche in Ansehung der Linie AΩ auf entgegengesetzten Seiten liegen, einander vollkommen gleich gesetzt werden dürfen. Wären sie zwar gleich groß, hätten aber nicht gleiche Werthe, so könnte einer für den andern, was doch hier gefordert wird, nicht vollkommen Ersatz seyn. Indem aber diese Theile gleich von Werth seyn müssen, können sie nicht allemal auch gleich von Inhalt seyn. Wir müssen

also

also zeigen, wie auch unter dieser Bedingung eine gebrochene Gränzlinie in eine gerade verwandelt werden möge.

§. 165.

Aufgabe. Es ist der relative Werth der dieß- und jenseits der gebrochenen Gränzlinie gelegenen Grundstücke gegeben: man soll die gebrochene Gränzlinie ABCDEF, dem Werthe des von selber begränzten Grundstückes unbeschadet, in eine gerade verwandeln.

Auflösung. Es verhalte sich der relative Werth des von ABCDEF begränzten Grundstückes zum angränzenden, wie m : n, und m sey größer, als n. Man ziehe aus A und EF die Linie AΩ, so, daß die Theile M und N sich beyläufig wie n : m zu einander verhalten. Es ist dieß darum nöthig, damit man vorläufig wissen möge, welches Stück der gebrochenen Gränzlinie die zu suchende gerade durchschneiden werde. Nach diesen Voraussetzungen wird, $M = x$ angenommen, $N = \frac{m}{n} x$, und, weil hier M positiv, und N negativ genommen werden muß, $S = M - N = \frac{n - m}{n} x$; also

$$\frac{n - m}{n} 2x = \omega (e \sin. E + d \sin. (E + D) + c \sin. (E + D + C) + b \sin. (E + D + C + B))$$

$$+ e (d \sin. D + c \sin. (D + C) + b \sin. (D + C + B))$$

$$+ d$$

$$+ d(c \sin. C + b \sin. (C + B))$$
$$+ c\, b \sin. B;$$ oder
$$= \omega\lambda + \mu,$$

wenn man die mit ω durch die Multiplication verbundenen Größen $= \lambda$, die damit durch die Addition verbundenen $= \mu$ setzt.

Man setze nun des positiven Theils M Seite $BZ = z$, so ist, vorausgesetzt, daß λ', μ' ähnliche Bedeutungen mit λ, μ haben, $2x = z\lambda' + \mu'$.

Ferner ist des negativen Theils N Inhalt

$$-\frac{m}{n} 2x = (c - z)\,(d \sin. C + e \sin. (C + D) + \omega \sin. (C + D + E))$$
$$d\,(e \sin. D + \omega \sin. (D + E))$$
$$e\,\omega \sin. E,$$ oder
$$= (c - z)\,(\alpha + \omega\beta) + \omega\gamma + \delta,$$

wenn man nämlich der Kürze wegen setzt:

$$\alpha = d \sin. C + e \sin. (C + D)$$
$$\beta = \sin. (C + D + E)$$
$$\gamma = d \sin. (D + E) + e \sin. E$$
$$\delta = d\,e \sin. D.$$

Da

Da nun ist

$$z = \frac{2x - \mu'}{\lambda'}, \text{ und}$$

$$c - z = \frac{-\frac{m}{n}2x - \omega\gamma - \delta}{\alpha + \omega\beta}, \text{ so wird}$$

$$c = \frac{2x - \mu'}{\lambda'} + \frac{-\frac{m}{n}2x - \omega\gamma - \delta}{\alpha + \omega\beta}.$$

Hieraus folgt

$$2x = \frac{(c\lambda' + \mu')(\alpha + \omega\beta) + \lambda'(\delta + \omega\gamma)}{\alpha + \omega\beta - \frac{m}{n}\lambda'},$$

und daher

$$\frac{n-m}{n}(\omega\lambda + \mu) = \frac{(c\lambda' + \mu')(\alpha + \omega\beta) + \lambda'(\delta + \omega\gamma)}{\alpha + \omega\beta - \frac{m}{n}\lambda'}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich endlich

$$\omega^2 + \omega\frac{1}{\beta\lambda}\left(\alpha\lambda + \beta\mu - \frac{m}{n}\lambda\lambda' - \frac{n-m}{n}(c\beta\lambda' + \beta\mu' + \gamma\lambda')\right)$$

$$= \frac{1}{\beta\lambda}\left(\frac{n-m}{n}(c\alpha\lambda' + \delta\mu' + \delta\lambda') - \alpha\mu + \frac{m}{n}\mu\lambda'\right),$$

oder verkürzt

$$\omega^2 + \omega P = Q; \text{ also}$$

$$\omega = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}P^2 + Q} - \tfrac{1}{2}P.$$

Z. B.

z. B. Es sey m = 9; n = 8; b = 410; c = 251; d = 83; e = 321; B = 91° 55′; C = 74° 36′; D = 233° 41′; E = 306° 48′, und BC werde von der geraden Gränzlinie AΩ in Z geschnitten. Dieser Voraussetzung gemäß ist ABZ ein Dreyeck, und daher für diesen Fall 2x = zb sin. B; also λ′ = b sin. B, und μ′ = 0. — Nach alle dem findet man:

$$\frac{\alpha\lambda}{\beta\lambda} = + 177,95$$

$$\frac{\beta\mu}{\beta\lambda} = - 221,28$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{\lambda\lambda'}{\beta\lambda} = - 477,07$$

$$\frac{n-m}{n} \cdot \frac{c\beta\lambda'}{\beta\lambda} = + 21,7$$

$$\frac{n-m}{n} \cdot \frac{\gamma\lambda'}{\beta\lambda} = + 23,0$$

$$\frac{n-m}{n} \cdot \frac{c\alpha\lambda'}{\beta\lambda} = + 3861,23$$

$$\frac{n-m}{n} \cdot \frac{\delta\lambda'}{\beta\lambda} = + 1920,6$$

$$\frac{\alpha\mu}{\beta\lambda} = - 39375,97$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{\mu\lambda'}{\beta\lambda} = + 105565,4$$

$$P = 177,95 - 221,28 + 477,07 - 21,7 - 23,0$$
$$= + 389,04$$

$$Q = 3861,23 + 1920,6 + 39375,97 + 105565,4$$
$$= + 150723,2$$

$$\tfrac{1}{2}P = 194,52;\ \tfrac{1}{4}P^2 = 37838,03$$

$$\tfrac{1}{4}P^2 + Q = 188561,23$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}P^2 + Q} = 434,23$$

$$\omega = \pm 434,23 - 194,52 = 239,71.$$

§. 166.

Wer den Weg, den ich bey Auflösung dieser Aufgabe gegangen, aufmerksam in Gedanken zurücklegt, der wird die hier gefundene Gleichung auch für den Fall, wo die gebrochene Gränzlinie mehr als einmal von der zu suchenden geraden geschnitten wird, leicht selbst einrichten können. Wie ich hier die zwey, für die Theile M und N gefundenen Ausdrücke auf einen gebracht habe, so mag er es auch mit dreyen, vieren und mehrern versuchen; der Erfolg wird immer seinem Fleiße und seiner Geschicklichkeit entsprechen. Und in so fern ist diese Gleichung ganz allgemein, wenigst so lange, als in dem relativen Werthe der angränzenden Grundstücke keine Veränderung vorgeht.

§. 167.

Für den Fall, wo m = n ist, verwandelt sich obige Gleichung in diese:

$$\omega^2 + \omega \frac{1}{\beta\lambda}(\alpha\lambda + \beta\mu - \lambda\lambda') = \frac{1}{\beta\lambda}(-\alpha\mu + \mu\lambda').$$

Sie

Sie gewähret mit der (§. 162.) gefundenen gleich- viel Richtigkeit. Denn setzen wir

Z. B. Es sey unter den nämlichen Bedingungen ω zu finden, so ist:

$$P = 177,95 - 221,95 + 424,06 = 380,06$$

$$Q = 39375,97 + 93835,91 = 133211,88$$

$$\tfrac{1}{2}P = 190,03; \ \tfrac{1}{4}P^2 = 36111,4$$

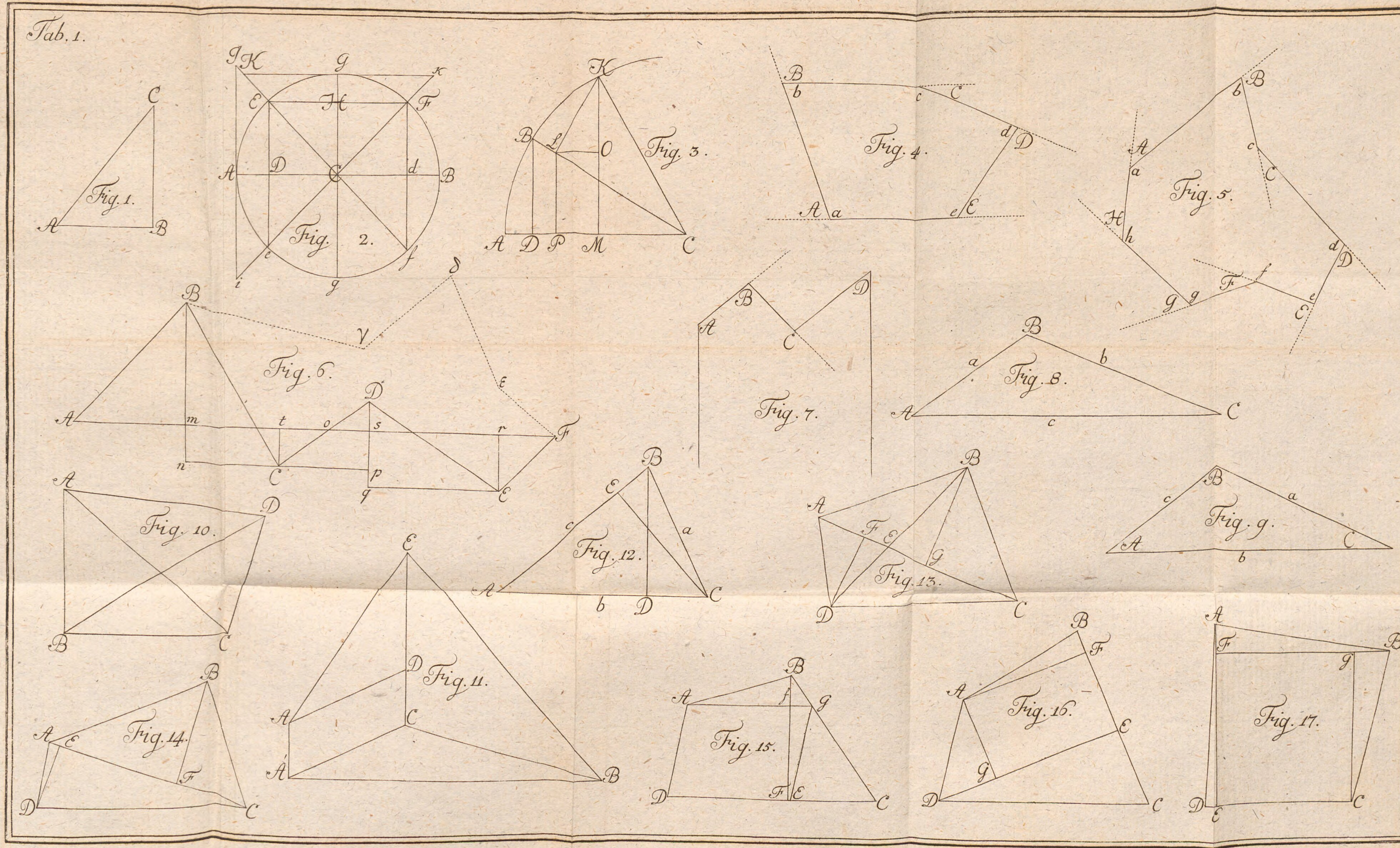
$$\tfrac{1}{4}P^2 + Q = 169323,28$$

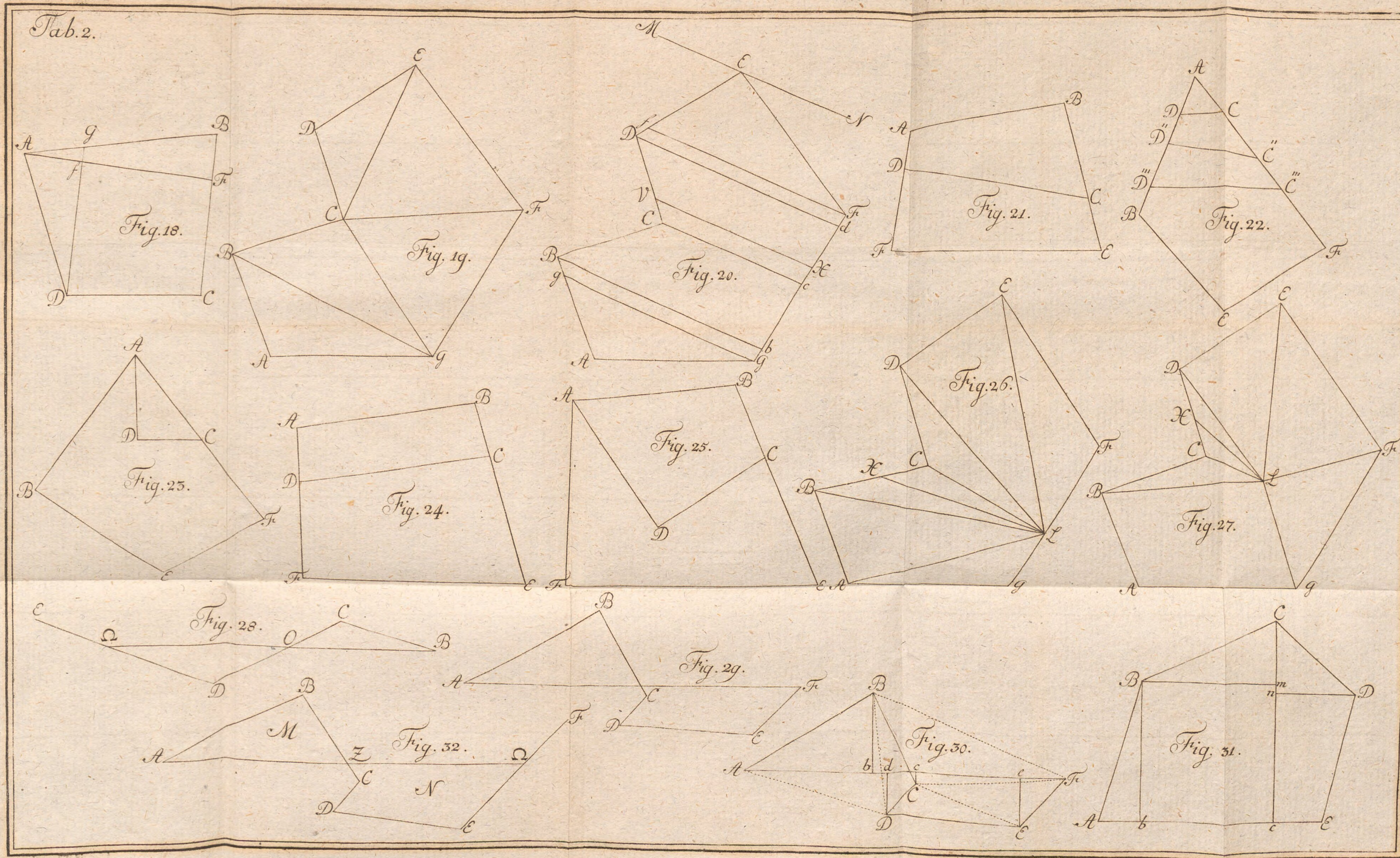
$$\sqrt{\tfrac{1}{4}P^2 + Q} = 411,95$$

$$\omega = \pm\, 411,95 - 190,03 = 221,92.$$

§. 168.

Daß die allgemeine Gleichung, welche wir (§. 165.) gefunden haben, sich auch zur ökonomischen Feldertheilung gut brauchen lasse, wird der mathematische Leser schon ohne mich bemerkt haben. Demselben sey es überlassen, auch für den Fall, wo nicht der Punkt, durch den die Theilungslinien gehen, sondern der Winkel, unter welchem sie die Gränzlinie der wechselnden Güte zweyer Grundstücke schneiden soll, gegeben sind, eine Gleichung zu finden. — Er wird sich wenigst überzeugen, daß die Polygonometrie da noch immer gute Dienste leisten könnte, wo die Trigonometrie nicht mehr hinreichet.


Tab. 1.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.



Ant. Fischer Sc. Mon.

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

4 Zrb:
2 Ar/

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Däzel, G. A.,

Über die zweckmäßigste und zuverläßigste Methode grosse Waldungen zu messen, zu zeichnen und zu berechnen

München 1799

Oecon. 450
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10294719-6
VD18 11390212